Sur deux problemes de reconstruction

M. Demazure

UNITE DE RECHERCHE
INRIA-ROCQUENCOURT

Institut National
de Recherche
en Informatique
et en Automatique

Domaine de Voluceau
Rocquencourt
B.P.105
78153 Le Chesnay Cedex
France
Tél.:(1) 39 63 55 11

Rapports de Recherche

N° 882

SUR DEUX PROBLEMES DE RECONSTRUCTION

Michel DEMAZURE

JUILLET 1988

Sur deux problèmes de reconstruction

Michel DEMAZURE

Résumé

Dans cet article, on s'intéresse à deux avatars de la question suivante : reconstruire une scène tridimensionnelle à partir de plusieurs vues. Les deux cas étudiés sont celui de deux vues d'une ensemble de points et de trois vues d'un ensemble de droites. Dans chaque cas, il s'introduit une variété algébrique dont la codimension est le nombre minimal nécessaire de composants de la scène, et le degré le nombre de reconstructions dans ce cas minimal. L'étude est complète dans le cas des points (le degré obtenu est 10, ce qui correspond en fait à 20 solutions). Dans le cas des droites, le degré de la variété reste à déterminer.

On two reconstruction problems

Abstract

The question addressed in this paper is the reconstruction of a three-dimensional scene from two-dimensional views. Two cases are studied : two views of a set of points, three views of a set of lines. In each case, an auxiliary algebraic variety is introduced. Its codimension is the minimal number of components of the scene. Its degree is the number of possible reconstructions in this minimal case. In the case of points, this degree is 10 (actually corresponding to 20 reconstructions). In the case of lines, this degree is still to be computed.

1 Introduction

1.1 Le problème

Dans ce qui suit, on s'intéresse à deux problèmes de vision artificielle. Une caméra regarde une scène fixe de plusieurs points de vue et on cherche à identifier les positions relatives de ces divers points de vue en comparant les vues obtenues. De façon plus précise, on attache à la caméra mobile un repère, ce qui donne un repère $\mathcal{R}_i$ pour chacune des n positions $i = 1, 2, \ldots$ de la caméra. A chaque partie A de la scène observée correspondent ainsi n images A_i. On suppose connaitre un ensemble de telles familles $(A_1, \ldots, A_n)$ et on cherche à déterminer les déplacements $d_{i,j}$ qui transforment entre eux les repères $\mathcal{R}_i$. Les deux cas particuliers étudiés sont les suivants :

1) les parties considérées sont des points et on dispose de deux vues,

2) les parties considérées sont des droites et on dispose de trois vues.

1.2 Le cas des points

Prenons d'abord le premier cas. Notons O l'origine du premier repère, O' l'origine du second, t la translation OO' et R la rotation qui applique le premier repère sur le second. Pour fixer les idées, considérons le premier repère comme une application f de $\mathbf{R}^3$ dans l'espace E et de même le second repère comme une application f' de $\mathbf{R}^3$ dans E. On a donc $f(0) = O$, $f'(0) = O'$ et, pour tout $z \in \mathbf{R}^3$, $f'(z) = f(t + Rz)$, où l'on représente t et R respectivement par un vecteur $t \in \mathbf{R}^3$ et une matrice réelle 3×3.

A chaque point p de la scène correspondent des images $x \in \mathbf{R}^3$ et $x' \in \mathbf{R}^3$, telles que les trois points $O = f(0)$, p et $f(x)$ soient alignés, ainsi que les trois points $O' = f(t)$, p et $f'(x') = f(t + Rx')$. Ainsi les trois vecteurs x, t et $t + Rx'$ de $\mathbf{R}^3$ sont coplanaires, ce qu'on peut écrire en introduisant le déterminant $\det(x, t, Rx') = 0$.

On voit ainsi que le premier problème se ramène à la question suivante : étant donné un système Σ de m couples de points (x_i, x_i') de $\mathbf{R}^3$, déterminer les couples (t, R) où t est un vecteur de $\mathbf{R}^3$ et R une matrice de rotation dans $\mathbf{M}_3(\mathbf{R})$ tels que $\det(x_i, t, Rx_i') = 0$ pour tout i.

Bien évidemment, ces relations sont homogènes en t, et l'on ne peut déterminer t qu'à un facteur d'échelle près.

1.3 La méthode

Notons $(x|y)$ et $x \wedge y$ les produits scalaire et vectoriel dans $\mathbf{R}^3$. Si l'on associe au couple (R,t) l'application linéaire $\varphi_{R,t} : y \mapsto R(y) \wedge t$, on voit qu'il s'agit de trouver celles de ces applications qui se trouvent dans la sous-variété linéaire L_Σ de $\mathbf{M}_3(\mathbf{R})$ d'équations $(x_i|u(x'_i)) = 0$.

Mais on peut démontrer que :

(i) L'ensemble des $\varphi_{R,t}$ est une sous-variété conique irréductible, de dimension 6 et de degré 10 dans l'espace des matrices 3×3. En particulier, une sous-variété linéaire L assez générale de codimension 5 la coupe suivant 10 droites passant par l'origine.

(ii) Un point de cette sous-variété provient de deux couples (R,t) et les 10 droites précédentes donnent vingt solutions en (R,t) (à l'homogénéité près en t) de l'équation $\varphi_{R,t} \in L$.

(iii) Toute sous-variété linéaire de codimension 5 assez générale est de la forme L_Σ. En fait, son orthogonal contient six éléments de la forme $(x|u(x'))$, dont cinq quelconques l'engendrent.

En fait, on démontre d'abord ces propriétés après complexification et on revient ensuite à la situation réelle d'origine.

On déduit alors de ce qui précède les assertions suivantes :

(i) Si cinq couples d'images (x_i, x'_i) sont donnés en position générale, il y a dix couples de solutions au système d'équations considéré.

(ii) Il existe alors de plus un sixième couple d'images, uniquement déterminé, qui convient pour toutes ces solutions.

(iii) Si on choisit l'un des couples de solutions, on peut éliminer les neufs autres par le choix d'un sixième couple d'images convenable.

1.4 Le cas des droites

Venons-en au second cas, celui où la scène est composée de droites et où l'on dispose de trois vues. Notons O, O' et O'' les origines des trois repères, t la translation OO', u la translation OO'', R la rotation qui applique le premier repère sur le second et S celle qui amène le premier sur le troisième. Comme plus haut, considérons les repères comme des applications $f : \mathbf{R}^3 \to E$, $f' : \mathbf{R}^3 \to E$ et $f'' : \mathbf{R}^3 \to E$. On a donc $f(0) = O$, $f'(0) = O'$, $f''(0) = O''$ et, pour tout $z \in \mathbf{R}^3$, $f'(z) = f(R(t+z))$ et $f''(z) = f(S(u+z))$, où cette fois-ci, on exprime t dans le deuxième repère et u dans le troisième.

Soit alors D une droite de E, et soient d, d' et d'' ses images dans les trois repères, supposeés ne pas passer par les origines respectives de ces repères. Notons P le plan vectoriel de $\mathbf{R}^3$ engendré par d et définissons de même P' et P''. Alors les trois plans $f(P)$, $f'(P')$ et $f''(P'')$ passent par D. Les trois plans P, $R(t+P')$ et $S(u+P'')$ ont donc en commun une droite. Repérons chacun des plans P, P' et P'' par un vecteur normal, soient n, n' et n''. Alors la condition signifie que l'ensemble des solutions du système d'équations $(n|z) = 0$, $(R(n')|z-t) = 0$, $(S(n'')|z-u) = 0$ n'est pas réduit à un point, ce qui implique en tout cas $\det(n, R(n'), S(n'')) = 0$, c'est-à-dire $(n|R(n') \wedge S(n'')) = 0$. Raisonnant comme ci-dessus, on est donc amené à introduire, dans l'espace (de dimension 27) des applications bilinéaires de $\mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3$ dans $\mathbf{R}^3$, la sous-variété formée des applications de la forme $(n', n'') \mapsto \lambda R(n') \wedge S(n'')$. Modulo quelques vérifications de routine, le problème est ainsi ramené à la détermination du degré d de cette sous-variété. Cette détermination reste à faire. Je n'ai pu qu'accumuler un certain nombre de renseignements sur cette sous-variété.

2 Préliminaires

2.1 Notations

On travaille dans l'espace vectoriel complexe $\mathcal{M} = \mathbf{M}_3(\mathbf{C})$ de dimension 9 formé des matrices carrées complexes d'ordre 3, complexifié de l'espace vectoriel réel $\mathcal{M}_{\mathbf{R}} = \mathbf{M}_3(\mathbf{R})$. On note $A \mapsto \tilde{A}$ l'opération de transposition. On identifie $E = \mathbf{C}^3$ à l'espace des matrices colonnes complexes et $E_{\mathbf{R}} = \mathbf{R}^3$ à l'espace des matrices colonnes réelles, et leurs duals respectifs aux espaces correspondant de matrices lignes. On munit E du produit scalaire usuel $(t|u) = \tilde{t}u = \sum(t_i u_i)$ qui fait de $E_{\mathbf{R}}$ un espace vectoriel euclidien, et de l'orientation usuelle, ce qui permet de définir le produit vectoriel $(t, u) \mapsto t \wedge u$ sur $E_{\mathbf{R}}$ et E. On a par définition $\det(u, v, w) = (u \wedge v|w)$. On notera qu'il existe des éléments non nuls $t \in E$ avec $(t|t) = 0$, mais qu'on ne peut pas trouver dans E deux vecteurs v et w non colinéaires, tels que $(v|v) = (v|w) = (w|w) = 0$. On note $\mathbf{1} \in \mathcal{M}_{\mathbf{R}}$ la matrice unité. Pour tout espace vectoriel V, on note $\mathbf{P}V$ l'espace projectif correspondant (c'est l'espace des droites vectorielles de V).

2.2 Matrices symétriques de rang 1

Pour $t \in E$, on a $\tilde{t}t = (t|t) = \sum t_i^2$ et $t\tilde{t}$ est la matrice symétrique de rang un $(t_i t_j)$. Si $t \in E_{\mathbf{R}}$, alors la matrice symétrique réelle $t\tilde{t}$ est positive. Inversement, si $A \in \mathcal{M}$ est symétrique et de rang 1, il existe $t \in E$ (défini au signe près) tel que $A = t\tilde{t}$. Si A est de plus réelle et positive, alors $t \in E_{\mathbf{R}}$.

2.3 Matrices antisymétriques

Pour $t \in E$, on note T_t la matrice de l'application linéaire $y \mapsto y \wedge t$. On a

$$T_t = \begin{pmatrix} 0 & t_3 & -t_2 \\ -t_3 & 0 & t_1 \\ t_2 & -t_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

L'application $t \mapsto T_t$ est une bijection de E sur l'espace des matrices antisymétriques; elle induit une bijection de $E_{\mathbf{R}}$ sur l'espace des matrices antisymétriques réelles. On obtient sans difficultés :

Lemme 2.1 — *a) On a $T_x y = -T_y x$, $T_t t = 0$ et $\tilde{t}T_t = 0$.*

b) Si $t \neq 0$, alors T_t est de rang 2, son noyau est le sous-espace engendré par t et son image est le plan $t^\perp$ orthogonal à t, noyau de la forme linéaire $\tilde{t}$.

c) On a $T_t T_{t'} = t'\tilde{t} - (t|t')\mathbf{1}$.

d) On a $T_t^2 = t\tilde{t} - (t|t)\mathbf{1}$, $\mathrm{Tr}(T_t^2) = -2(t|t)$ et $t\tilde{t} = T_t^2 - \frac{1}{2}\mathrm{Tr}(T_t^2)\mathbf{1}$. Si $(t|t) \neq 0$, $-T_t^2/(t|t)$ est l'orthoprojecteur sur $t^\perp$.

e) La donnée de T_t^2 permet de reconstituer t au signe près. Pour que t appartienne à $E_{\mathbf{R}}$, il faut et il suffit que la matrice symétrique $-T_t^2$ soit réelle et positive.

f) On a $T_t^3 = -(t|t)T_t = \frac{1}{2}\mathrm{Tr}(T_t^2)T_t$.

g) Si $(t|t) \neq 0$, alors T_t^2 est de rang 2, son noyau et son image sont les mêmes que ceux de T_t. Si $(t|t) = 0$, alors $T_t^2 = t\tilde{t}$ est de rang 1.

2.4 Matrices orthogonales

On note $\mathcal{R}$ le groupe des rotations de E formé des matrices $A \in \mathcal{M}$ telles que $\tilde{A}A = \mathbf{1}$ et $\det(A) = 1$, et $\mathcal{R}_{\mathbf{R}} = \mathcal{R} \cap \mathcal{M}_{\mathbf{R}}$ le sous-groupe formé des rotations de E. Soient $R \in \mathcal{M}$. Désignons par r_1, r_2 et r_3 les trois colonnes de R. Pour que R appartienne à $\mathcal{R}$, il faut et il suffit que (r_1, r_2, r_3) soit une *base orthonormée directe* de E, c'est-à-dire que l'on ait les formules usuelles $(r_1|r_1) = 1$, $(r_1|r_2) = 0$, $r_1 \wedge r_2 = r_3$, etc.

Pour tout $t \in E$, on note $\mathcal{R}_t$ le sous-groupe de $\mathcal{R}$ formé des éléments R tels que Rt soit proportionnel à t.

2.5 Demi-tours

Soit $t \in E$ avec $(t|t) \neq 0$, et soit $R \in \mathcal{R}_t$. Puisque $(Rt|Rt) = (t|t)$, on a $Rt = \pm t$. On note $\mathcal{R}_t^+$ le sous-groupe (d'indice 2) de $\mathcal{R}_t$ formé des $R \in \mathcal{R}$ tels que $Rt = t$. Il s'identifie au groupe des rotations du plan orthogonal de t. Si l'on choisit une base orthonormée directe (e_1, e_2, e_3) avec t proportionnel à e_1, un élément R de $\mathcal{R}_t^+$ se représente par une matrice

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & -\beta \\ 0 & \beta & \alpha \end{pmatrix}$$

où $\alpha^2 + \beta^2 = 1$. On a d'ailleurs $\alpha = \frac{1}{2}(\mathrm{Tr}(R) - 1)$.

Notons $\sigma_t \in \mathcal{R}$ l'unique élément d'ordre 2 de $\mathcal{R}_t^+$. C'est la rotation qui respecte t et vaut $-\mathbf{1}$ sur le plan orthogonal. On a $\sigma_t x = -x + \frac{2}{(t|t)}(t|x)t$, donc

$$\sigma_t = -\mathbf{1} + \frac{2}{(t|t)} t\tilde{t}, \quad \sigma_t \sigma_t = \mathbf{1}.$$

Si u est tel que $(t|u) = 0$ et $(u|u) \neq 0$, alors σ_u appartient à $\mathcal{R}_t$ mais pas à $\mathcal{R}_t^+$. Ainsi, $\mathcal{R}_t$ est réunion dispointe de $\mathcal{R}_t$ et R_t^+. Pour $R \in \mathcal{R}_t^+$, on a $\sigma_u R \sigma_u = R^{-1}$.

Lemme 2.2 — *a) Soient t et w dans E et $\alpha \in \mathbf{C}$. Posons $R = \alpha\mathbf{1} + w\tilde{t}$. Si $R \in \mathcal{R}$, alors ou bien $R = \mathbf{1}$, ou bien $(t|t) \neq 0$ et $R = \sigma_t$.*

b) Soient t, t' et v trois vecteurs de E, soit $\epsilon = \pm 1$ et soit $\alpha \in \mathbf{C}$. Posons $R = \epsilon\mathbf{1} + \alpha t\tilde{t} + v\tilde{t}'$. Si R appartient à $\mathcal{R}$, alors, on est dans l'un des quatre cas suivants

1) $R = \mathbf{1}$,

2) $(t|t) \neq 0$ et $R = \sigma_t$,

3) $(t'|t') \neq 0$ et $R = \sigma_{t'}$,

4) $(t|t) \neq 0$, $(t'|t') \neq 0$ et $R = \sigma_t \sigma_{t'}$.

Démontrons a). Si $t = 0$, on a $R = \alpha\mathbf{1}$, donc $R = \mathbf{1}$. Supposons $t \neq 0$ et écrivons $R\tilde{R} = \mathbf{1}$. On obtient

$$\alpha t\tilde{w} + \alpha w\tilde{t} + (t|t)w\tilde{w} = (1 - \alpha^2)\mathbf{1}.$$

Comparant les rangs des deux membres, on voit qu'ils doivent être tous deux nuls, ce qui impose que $\alpha = \pm 1$ et que w et t soient proportionnels. Posant $w = \mu t$, on obtient alors $\alpha = \pm 1$ et $\mu(2\alpha + \mu(t|t)) = 0$. On a donc, ou bien $\mu = 0$, donc $R = \alpha\mathbf{1}$, ou bien $(t|t) \neq 0$ et $\mu = -2\alpha/(t|t)$, soit $R = -\alpha\sigma_t$. On conclut en écrivant $\det(R) = 1$.

Démontrons b). Si t et t' sont proportionnels, alors R s'écrit $\epsilon\mathbf{1} + u\tilde{t}$ et on applique a). Supposons que t et t' ne soient pas proportionnels. Il existe alors $a \in E$ avec $(t'|a) = 0$ et $(t|a) = 1$. On a $Ra = \epsilon a + \alpha t$. Ecrivant $(Ra|Ra) = (a|a)$, on obtient $\alpha(2 + \epsilon\alpha(t|t)) = 0$. Si $\alpha = 0$, alors $R = \epsilon\mathbf{1} + v\tilde{t}'$ et on conclut d'après a). Sinon, on a $(t|t) \neq 0$ et $\alpha = 2\epsilon/(t|t)$, soit $R = -\epsilon\sigma_t + vt'$, ou encore $\sigma_t R = -\epsilon\mathbf{1} + (\sigma_t v)t'$. On applique alors a).

2.6 Vecteurs isotropes

On appelle vecteurs *isotropes* les éléments u de E tels que $(u|u) = 0$.

Lemme 2.3 — *Soient u et v deux vecteurs isotropes de E tels que $(u|v) = 2$.*

a) Il existe une unique base orthonormée directe (e_1, e_2, e_3) avec $u = e_1 + ie_2$ et $v = e_1 - ie_2$. Posons $e = \frac{1}{2}u \wedge v$. On a $e = ie_3$, $(e|v) = (e|u) = 0$, $(e|e) = -1$, $e \wedge v = v$, $e \wedge u = -u$ et $u \wedge v = 2e$.

b) Il existe une suite de scalaires $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ et une suite de rotations $R_1, R_2, \ldots$ tels que la suite $\lambda_1 R_1, \lambda_2 R_2, \ldots$ ait pour limite $u\tilde{v}$.

Pour a), il suffit de prendre $e_1 = \frac{1}{2}(u+v)$, $e_2 = \frac{1}{2i}(u-v)$ et $e_3 = e_1 \wedge e_2$. Démontrons b). On a $(u\tilde{v})u = 2u$, $(u\tilde{v})v = 0$ et $(u\tilde{v})e = 0$. Soit $\lambda \in \mathbf{C}$. Notons $R(\lambda)$ l'élément de $\mathcal{M}$ tel que $Rv = \lambda v$, $Ru = \frac{1}{\lambda}u$ et $Re = e$. Il est clair que R appartient à $\mathcal{R}$. Alors l'application $2\lambda R(\lambda)$ envoie u sur $2u$, e sur λe et v sur $\lambda^2 v$. Lorsque λ tend vers 0, elle tend vers $u\tilde{v}$.

Lemme 2.4 — *a) Soit $v \in E$ un vecteur isotrope non nul. Il existe un vecteur $u \in E$ avec $(u|u) = 0$, $(u|v) = 2$.*

b) Soient v et w deux vecteurs non proportionnels avec $(v|v) = 0$. Il existe un vecteur $u \in E$ avec $(u|u) = 0$, $(u|v) = 2$ et $(u|w) = 0$.

c) Soient v et w deux vecteurs avec $(v|v) = 0$, $v \neq 0$, $(v,w) = 0$ et $(w|w) = 1$. Il existe une base orthonormée directe (e_1, e_2, e_3) avec $v = e_1 - ie_2$ et $w = \pm e_3$.

La partie a) est un cas particulier de b). Prouvons b). Puisque v et w ne sont pas proportionnels, il existe $u_0 \in E$ avec $(u_0|w) = 0$ et $(u_0|v) = 2$. Soit $u_1 \in E$ engendrant la droite orthogonale à v et w. Distinguons deux cas. Si $(v|w) = 0$, alors u_1 est proportionnel à v, donc $(u_0|u_1) \neq 0$; si $(v|w) \neq 0$, alors u_1 n'est pas proportionnel à v, donc $(u_1|u_1) \neq 0$ (noter qu'on a $(v|v) = 0$ et $(v|u_1) = 0$). Dans les deux cas, le polynome $(u_0 + Xu_1|u_0 + Xu_1)$ n'est pas constant. Si α est une racine de ce polynome, alors $u = u_0 + \alpha u_1$ répond à la question.

Prouvons c). Appliquant b), puis le lemme précédent, on obtient une base orthonormée directe (e_1, e_2, e_3) avec $u = e_1 + ie_2$ et $v = e_1 - ie_2$. Puisque w est orthogonal à u et v, il est colinéaire à e_3 donc égal à $\pm e_3$.

2.7 Le stabilisateur d'une droite isotrope

Soit $t \in E$ un vecteur isotrope non nul. Nous allons déterminer le groupe $\mathcal{R}_t$. Choisissons un vecteur isotrope u avec $(t|u) = 2$ (lemme 2.4, et posons $e = \frac{1}{2}u \wedge t$. On a $(e|t) = (e|u) = 0$, $(e|e) = -1$, $e \wedge t = t$ (lemme 2.3). Soit $R \in \mathcal{R}_t$. On a $Rt = \mu t$, avec $\mu \in \mathbf{C}$, $\mu \neq 0$. Ainsi $(Re|t) = (e|R^{-1}t) = \mu^{-1}(e|t) = 0$, donc $Re = \alpha e + \nu t$, avec α et ν convenables. Mais la relation $Re \wedge Rt = R(e \wedge t) = Rt$ implique alors $\alpha = 1$, donc $Re = e + \nu t$. Enfin, puisque

$(Ru|Rt) = (u|t) = 2$, $(Ru|Re) = (u|e) = 0$ et $(Ru|Ru) = (u|u) = 0$, on obtient en définitive $R = R_{\mu,\nu}$ avec

$$R_{\mu,\nu}t = \mu t,\ R_{\mu,\nu}e = e + \nu t,\ R_{\mu,\nu}u = \frac{1}{\mu}u + \frac{2\nu}{\mu}e + \frac{\nu^2}{\mu}t.$$

Le groupe $\mathcal{R}_t$ est de dimension 2, il est formé des transformations $R_{\mu,\nu}$ avec $\mu \in \mathbf{C}$, $\nu \in \mathbf{C}$ et $\mu \neq 0$. On a $R_{\mu,\nu}R_{\mu',\nu'}$ $R_{\mu\mu',\mu'\nu+\nu'}$.

2.8 Limites de similitudes

Si t et t' sont deux éléments de E avec $t \neq 0$, $t' \neq 0$ et $(t|t) = (t'|t') \neq 0$, il existe $R \in \mathcal{R}$ avec $Rt = t'$: choisissant $\alpha \in \mathbf{C}$ avec $\alpha^2 = (t|t) = (t'|t')$, on peut en effet trouver deux bases orthonormées directes (e_1, e_2, e_3) et (e'_1, e'_2, e'_3) telles que $t = \alpha e_1$ et $t' = \alpha e'_1$. Deux matrices orthogonales R telles que $Rt = t'$ se déduisent l'une de l'autre par multiplication à droite par un élément convenable de $\mathcal{R}_t^+$.

Si t et t' sont deux éléments de E avec $(t|t) = (t'|t') = 0$, il existe $R \in \mathcal{R}$ avec $Rt = t'$: on peut en effet trouver d'après 2.3 et 2.4 deux bases orthonormées directes (e_1, e_2, e_3) et (e'_1, e'_2, e'_3) telles que $t = e_1 + ie_2$ et $t' = e'_1 + ie'_2$. Deux matrices orthogonales R telles que $Rt = t'$ se déduisent l'une de l'autre par multiplication à droite par un élément convenable de $\mathcal{R}_t$.

Lemme 2.5 — *L'adhérence dans $\mathcal{M}$ de l'ensemble $\mathbf{C}\mathcal{R}$ formé des matrices λR avec $\lambda \in \mathbf{C}$ et $R \in \mathcal{R}$ est la réunion disjointe de $\mathbf{C}\mathcal{R}$ et de l'ensemble des $w\tilde{v}$ où v et w sont deux vecteurs isotropes non nuls.*

Soit u un élément de $\mathcal{M}$ limite d'une suite $(\lambda_i R_i)$ avec $\lambda_i \in \mathbf{C}$ et $R_i \in \mathcal{R}$. Soit $x \in E$. On a $(ux|ux) = \lim \lambda_i^2 (R_i x|R_i x) = \lim \lambda_i^2 (x|x)$. Prenant x tel que $(x|x) \neq 0$, on en déduit que la suite (λ_i^2) tend vers une limite. Passant à une suite extraite, on peut supposer que λ_i tend vers une limite λ. Si $\lambda \neq 0$, alors R_i tend vers $\lambda^{-1}u$, qui appartient nécessairement à $\mathcal{R}$, et on a $u \in \mathbf{C}\mathcal{R}$. Si $\lambda = 0$, alors $(ux|ux) = 0$ pour tout x, ce qui impose que u s'écrive $w\tilde{v}$ avec $(w|w) = 0$. Le même argument appliqué à $\tilde{u}$ montre que $(v|v) = 0$.

Inversement, soient v et w dans E avec $v \neq 0$, $w \neq 0$ et $(v|v) = (w|w) = 0$. D'après 2.4, il existe u avec $(u|u) = 0$ et $(u|v) = 2$. D'après 2.3, il existe des suites (λ_i) et R_i, avec $\lim \lambda_i R_i = u\tilde{v}$. Si $R \in \mathcal{R}$ est tel que $w = Ru$, on a $w\tilde{v} = \lim \lambda_i R R_i$.

3 La variété $\mathcal{V}$

3.1 Les équations

On considère l'application de $\mathcal{R}\times E$ dans $\mathcal{M}$ qui au couple (R,t) associe la matrice $\varphi(R,t) = T_tR$ de l'application $y \mapsto R(y) \wedge t$. Si $B = \varphi(R,t)$, on a

$$B\tilde{B} = -T_tR\tilde{R}T_t = -T_t^2, \quad \tilde{t}B = \tilde{t}T_tR, \quad \det(B) = 0.$$

On tire de là et de 2.1

$$\frac{1}{2}\mathrm{Tr}(B\tilde{B})\mathbf{1} - B\tilde{B} = t\tilde{t}, \quad \tilde{t}B = 0, \quad \det(B) = 0. \tag{1}$$

et donc

$$\frac{1}{2}\mathrm{Tr}(B\tilde{B})B - B\tilde{B}B = 0, \quad \det(B) = 0, \tag{2}$$

Pour $B \in \mathcal{M}$, définissons $F(B) \in \mathcal{M}$ par

$$F(B) = \frac{1}{2}\mathrm{Tr}(B\tilde{B})B - B\tilde{B}B \tag{3}$$

et notons $F_{i,j}(B)$ les neuf coefficients de la matrice $F(B)$. Les relations (2) donnent donc les dix équations $F_{1,1}(B) = 0, \ldots, F_{3,3}(B) = 0$, $\det(B) = 0$ qui sont toutes homogènes du troisième degré par rapport aux coefficients de B. Ces dix équations sont linéairement indépendantes ; on peut le vérifier par force brute ; nous le constaterons plus loin. Soit $\mathcal{V}$ la sous-variété algébrique (conique) de $\mathcal{M}$ définie par ces équations.

Notons que $\mathcal{V}$ est stable par l'application $B \mapsto \tilde{B}$, ainsi que par les applications $B \mapsto BS$ et $B \mapsto SB$, pour $S \in \mathcal{R}$. Cela résulte en effet des relations

$$F(\tilde{B}) = F(B)^{\sim}, \quad \det(\tilde{B}) = \det(B),$$

$$F(BS) = F(B)S, \quad F(SB) = SF(B), \quad \det(BS) = \det(SB) = det(B).$$

Si $B = \varphi(R,t)$, on a d'ailleurs $\tilde{B} = \tilde{R}\tilde{T}_t = R^{-1}T_{-t} = R^{-1}T_{-t}RR^{-1} = \varphi(R^{-1}, -R^{-1}t)$, $BS = T_tRS = \varphi(RS,t)$ et $SB = ST_tS^{1-}SR = \varphi(SR, St)$.

Notons G le groupe algébrique $\mathbf{C}^*\times\mathcal{R}\times\mathcal{R}$. Il opère sur $\mathcal{M}$ de la façon suivante. L'élément (λ, S, S') de G transforme l'application B en l'application $\lambda SBS'^{-1}$. Alors $\mathcal{V}$ est stable par cette action. On a $(\lambda, S, S')\varphi(R,t) = \varphi(SRS'^{-1}, St)$. L'image de φ est donc la réunion de deux orbites U_{ni} et U_i de G, images respectives de l'ensemble des couples (R,t) avec t non-isotrope ou isotrope.

3.2 Le morphisme φ

Pour tout couple $(R, t) \in \mathcal{R} \times E$, on a $\varphi(R, t) \in \mathcal{V}$ et on obtient ainsi une application (un morphisme de variétés algébriques) φ de $\mathcal{R} \times E$ dans $\mathcal{V}$. Notons quelques propriétés de cette application:

a) On a $\varphi(R, 0) = 0$; plus généralement, $\varphi(R, \lambda t) = \lambda\varphi(R, t)$. Si $t \neq 0$, alors $\varphi(R, t) \neq 0$. Ainsi, φ définit un morphisme de la variété $\mathcal{R} \times \mathbf{P}E$ dans la sous-variété projective $\mathbf{P}\mathcal{V}$ de l'espace projectif $\mathbf{P}\mathcal{M}$.

b) Si $t \neq 0$, alors $\varphi(R, t)$ est de rang 2.

c) Si $B = \varphi(R, t)$, on a $\mathrm{Tr}(B\tilde{B}) = 2(t|t)$.

d) Si R et t sont réels, alors $\varphi(R, t)$ est réel. Inversement, on verra ci-dessous que si $B = \varphi(R, t)$ est réel, alors t et R sont réels.

e) Soit $t \in E$ avec $(t|t) \neq 0$. On a $T_t\sigma_t = -T_t = T_{-t}$, donc $\varphi(\sigma_t R, -t) = \varphi(R, t)$ pour tout $R \in \mathcal{R}$. Inversement :

PROPOSITION 3.1 — *Soient $R \in \mathcal{R}$ et $t \in E$ avec $t \neq 0$. Soient $R' \in \mathcal{R}$, $t' \in E$ et $\alpha \in \mathbf{C}$ avec $\alpha \neq 0$ et $\varphi(R', t') = \alpha\varphi(R, t)$. On a, soit $R' = R$ et $t' = \alpha t$, soit $(t|t) \neq 0$, $t' = -\alpha t$ et $R' = \sigma_t R$.*

La relation donnée s'écrit aussi $x \wedge t' = \alpha R\tilde{R}' x \wedge t$ pour tout x. On a par conséquent $(t|x \wedge t') = 0$ pour tout x, donc $(x|t \wedge t') = 0$ pour tout x, et les deux vecteurs t et t' sont proportionnels. Posons $t' = \beta\alpha t$, de sorte qu'on a $R\tilde{R}'x - \beta x) \wedge t = 0$ pour tout x. On peut écrire $R\tilde{R}' = \beta\mathbf{1} + t\tilde{w}$ pour un w convenable et on conclut en appliquant à $R'\tilde{R}$ le lemme 2.2 a).

PROPOSITION 3.2 — *L'application φ est étale en tout point (R, t) avec $t \neq 0$: son application tangente en un tel point est injective.*

Soit ϵ une variable de carré nul. Un point infiniment voisin du point (R, t) sur $\mathcal{M}$ s'écrit $((\mathbf{1} + \epsilon T_v)R, t + \epsilon w)$ avec v et w dans E. Son image par φ est

$$(T_t + \epsilon T_w)(\mathbf{1} + \epsilon T_v)R = \varphi(R, t) + \epsilon(T_t T_v + T_w).$$

Le noyau de l'application tangente à φ au point (R, t) s'identifie donc à l'ensemble des couples (v, w) d'éléments de E tels que $T_t T_v + T_w = 0$. Dire qu'il est réduit à zéro signifie que $T_t T_v$ ne peut être antisymétrique que si $v = 0$. Or, d'après 2.1 c), on a $T_t T_v + T_v T_t = v\tilde{t} + t\tilde{v} + 2(v|t)\mathbf{1}$. La condition cherchée s'écrit donc $v\tilde{t} + t\tilde{v} = -2(t|v)\mathbf{1}$. Considérant les rangs des deux membres, on obtient $v\tilde{t} + t\tilde{v} = 0$, d'où aussitôt $v = 0$.

THEOREME 3.3 — *a) Tout élément B de $\mathcal{V}$ est de rang ≤ 2. Pour que $B \in \mathcal{V}$ soit de la forme $\varphi(R, t)$ avec $t \neq 0$, il faut et il suffit que B soit de rang 2. Si B est réel, alors R et t sont réels.*

b) Soit $B \in \mathcal{M}$. Les conditions suivantes sont équivalentes :

1) on a $\mathrm{rg}(B) \leq 1$ et $B \in \mathcal{V}$,

2) on a $\mathrm{rg}(B) \leq 1$ et $\mathrm{Tr}(B\tilde{B}) = 0$,

3) on a $B\tilde{B} = 0$ ou $\tilde{B}B = 0$,

4) il existe v et w dans E avec $(v|v)(w|w) = 0$ et $B = w\tilde{v}$.

a) Supposons $B \in \mathcal{V}$ de rang 2. Puisque $\left(\frac{1}{2}\mathrm{Tr}(B\tilde{B})\mathbf{1} - B\tilde{B}\right)B = 0$, la matrice $\frac{1}{2}\mathrm{Tr}(B\tilde{B})\mathbf{1} - B\tilde{B}$ est nulle ou de rang 1. Le premier cas est exclus : il donnerait en effet $B\tilde{B} = \lambda\mathbf{1}$, avec $\lambda = \frac{1}{2}\mathrm{Tr}(B\tilde{B})B = \frac{3}{2}\lambda$, donc $B\tilde{B} = 0$, ce qui est impossible, puisque B et $\tilde{B}$ sont de rang 2. Ainsi, la matrice symétrique $\frac{1}{2}\mathrm{Tr}(B\tilde{B})\mathbf{1} - B\tilde{B}$ est de rang 1, donc s'écrit $t\tilde{t}$ pour un élément convenable t non nul de E. Puisque $t\tilde{t}B = 0$, on a $\tilde{t}B = 0$. Prenant par ailleurs les traces des deux membres de la relation $\frac{1}{2}\mathrm{Tr}(B\tilde{B})\mathbf{1} - B\tilde{B} = t\tilde{t}$, on trouve $\mathrm{Tr}(B\tilde{B}) = 2(t|t)$, et en définitive d'après 2.1 d), $B\tilde{B} = -T_t^2$ avec $\tilde{t}B = 0$. Si B est réelle, alors la matrice symétrique $-T_t^2 = B\tilde{B}$ est réelle et positive, donc t est réel (2.1 e). Prouvons maintenant qu'il existe $R \in \mathcal{R}$ avec $B = T_tR$.

Supposons d'abord $(t|t) \neq 0$. Remplaçant B par un multiple convenable, on se ramène au cas où $(t|t) = 1$. On peut alors trouver une base orthonormée directe (e_1, e_2, e_3) de E telle que $t = e_1$. Si t est réel, on peut prendre les e_i réels. On a $\tilde{B}e_1 = \tilde{B}t = 0$, posons $\tilde{B}e_2 = v$, $\tilde{B}e_3 = w$. On a

$$(v|v) = \tilde{e}_2B\tilde{B}e_2 = -\tilde{e}_2\tilde{T}_tT_te_2 = (e_2 \wedge t|e_2 \wedge t) = (-e_3| - e_3) = 1,$$

et on voit de même que $(w|w) = 1$, $(w|v) = 0$. Il existe donc une base orthonormée directe (f_1, f_2, f_3) avec $f_2 = w$, $f_3 = v$, qui est réelle si B est réel. Soit alors $R \in \mathcal{R}$ la rotation telle que $Rf_i = e_i$, qui est réelle si t est réel. On a $-\tilde{R}T_te_1 = 0 = \tilde{B}e_1$,

$$-\tilde{R}T_te_2 = -\tilde{R}(e_2 \wedge t) = \tilde{R}e_3 = f_3 = v = \tilde{B}e_2.$$

On vérifie de même que $-\tilde{R}T_te_3 = \tilde{B}e_3$. Cela prouve que $-\tilde{R}T_t = \tilde{B}$ donc $T_tR = B$.

Ceci règle le cas où $(t|t) \neq 0$. Supposons maintenant $(t|t) = 0$. On a donc $B\tilde{B} = -t\tilde{t}$ (en particulier, ni B ni t ne sont réels). D'après les lemmes 2.4 et 2.3, il existe une base orthonormée directe (e_1, e_2, e_3) de E telle que $t = e_1 - ie_2$. Posons $\tilde{B}e_1 = u$, $\tilde{B}e_2 = v$, $\tilde{B}e_3 = w$. Puisque $\tilde{B}t = 0$, on a $u = iv$. Par ailleurs

$$(v|v) = \tilde{e}_2B\tilde{B}e_2 = -\tilde{e}_2t\tilde{t}e_2 = -(t|e_2)^2 = 1,$$

et de même $(w|w) = 0$, $(w|v) = 0$. D'après le lemme 2.4, il existe une base orthonormée directe (f_1, f_2, f_3) avec $w = if_1 - f_2$ et $v = \pm f_3$. Si on change t en $-t$, ce qui est loisible, on peut changer e_1 et e_2 de signe, donc aussi v, sans changer e_3, donc sans changer w. On peut donc conserver la base (f_i), tout en changeant v de signe. Cela permet d'imposer $v = f_3$. Soit alors $R \in \mathcal{R}$ la rotation telle que $Rf_i = e_i$. On a

$$-\tilde{R}T_te_1 = -\tilde{R}(e_1 \wedge (e_1 - ie_2)) = i\tilde{R}e_3 = if_3 = iv = u = \tilde{B}e_1.$$

On vérifie de même que $-\tilde{R}T_te_2 = \tilde{B}e_2$ et $-\tilde{R}T_te_3 = \tilde{B}e_3$. Cela prouve que $-\tilde{R}T_t = \tilde{B}$ donc $T_tR = B$, ce qui achève de démontrer a).

b) Chacune des quatre conditions proposées implique que $\mathrm{rg}(B) \leq 1$, c'est-à-dire qu'il existe v et w dans E avec $B = w\tilde{v}$. On a alors $\tilde{B}B = (w|w)v\tilde{v}$, $B\tilde{B} = (v|v)w\tilde{w}$, $\mathrm{Tr}(B\tilde{B}) = (v|v)(w|w)$ et $F(B) = -\frac{1}{2}(v|v)(w|w)w\tilde{v}$. Chacune des quatre conditions est donc équivalente à $(v|v)(w|w) = 0$.

Remarque 3.4 *Pour tout $B \in \mathcal{V}$, on a $\mathrm{rg}(\frac{1}{2}\mathrm{Tr}(B\tilde{B})\mathbf{1} - B\tilde{B}) \leq 1$ et, si t est tel que $\frac{1}{2}\mathrm{Tr}(B\tilde{B})\mathbf{1} - B\tilde{B} = t\tilde{t}$, on a $B\tilde{B} = -T_t^2$ et $\tilde{B}t = 0$.*

C'est en effet ce que l'on a vu au cours de la démonstration de a) lorsque $\mathrm{rg}(B) = 2$, et cela se vérifie par un calcul immédiat lorsque $\mathrm{rg}(B) \leq 1$.

De 3.2 c) et des énoncés précédents, on tire :

COROLLAIRE 3.5 — *La variété V est réunion disjointe de cinq orbites de G. L'orbite U_{ni} est ouverte dans $\mathcal{V}$. Elle est formé des $B \in \mathcal{V}$ tels que $\mathrm{Tr}(B\tilde{B}) \neq 0$ et φ induit au dessus de cette orbite un revêtement de degré 2 formé des couples (R, t) avec $(t|t) \neq 0$.*

PROPOSITION 3.6 — *La variété conique $\mathcal{V}$ est irréductible et de dimension 6. De manière équivalente, la variété projective $\mathbf{P}\mathcal{V}$ est irréductible et de dimension 5.*

Puisque U_{ni} est irréductible et de dimension 6, il suffit de prouver que tout élément de $\mathcal{V}$ est adhérent à U_{ni}, c'est-à-dire d'après le théorème 3.3, que si v et w sont deux vecteurs non nuls de E tels que $(v|v)(w|w) = 0$, la matrice $B = w\tilde{v}$ est limite d'une suite de matrices de la forme $\varphi(R_j, t_j)$. Quitte à remplacer B par $\tilde{B}$, on peut supposer que $(v|v) = 0$ et, par un deuxième passage à la limite que $(w|w) \neq 0$. D'après le lemme 2.4, il existe $u \in E$ tel que $(u|u) = 0$, $(u|w) = 0$ et $(u|v) = 2$, et d'après le lemme 2.3, il existe une suite de scalaires (λ_j) et une suite de rotations (R_j) telles que $\lim \lambda_j R_j = u\tilde{v}$. Puisque $(u|w) = 0$, il existe $t \in E$ tel que $w = T_tu$. On a donc

$$\lim \varphi(\lambda_j t, R_j) = \lim T_{\lambda_j t}R_j = \lim T_t\lambda_j R_j = T_tu\tilde{v} = w\tilde{v} = B.$$

4 La situation réelle

Notons $\mathcal{V}_{\mathbf{R}} = \mathcal{V} \cap \mathcal{M}_{\mathbf{R}}$ l'ensemble des points réels de $\mathcal{V}$ et $\mathbf{P}\mathcal{V}_{\mathbf{R}}$ son image dans $\mathbf{P}\mathcal{M}_{\mathbf{R}}$. Du paragraphe précédent, on tire :

PROPOSITION 4.1 — *L'application $\mathcal{R}_{\mathbf{R}} \times E_{\mathbf{R}} \to \mathcal{V}_{\mathbf{R}}$ déduite de φ est surjective. L'application $\mathcal{R}_{\mathbf{R}} \times \mathbf{P}E_{\mathbf{R}} \to \mathbf{P}\mathcal{V}_{\mathbf{R}}$ déduite de φ est un revêtement de degré 2.*

Lemme 4.2 — *Soit $B \in \mathcal{M}$. Posons comme ci-dessus $F(B) = \frac{1}{2}\mathrm{Tr}(B\tilde{B})B - B\tilde{B}B$. On a*

$$\mathrm{Tr}(F(B)\tilde{F}(B)) = -\frac{1}{2}\mathrm{Tr}(B\tilde{B})\mathrm{Tr}(F(B)\tilde{B}) + 3\det(B)^2. \tag{4}$$

Notons X la matrice $B\tilde{B}$ et posons

$$\tau_1 = \mathrm{Tr}(X),\ \tau_2 = \mathrm{Tr}(X^2),\ \tau_3 = \mathrm{Tr}(X^3).$$

Par les formules de Newton, on a

$$\tau_3 = -\frac{1}{2}\tau_1^3 + \frac{3}{2}\tau_1\tau_2 + 3\det(X) \tag{5}$$

et évidemment $\det(X) = \det(B)^2$. Par ailleurs, on a $F(B)\tilde{B} = \frac{1}{2}\mathrm{Tr}(X)X - X^2$, donc

$$\mathrm{Tr}(F(B)\tilde{B}) = \frac{1}{2}\tau_1^2 - \tau_2. \tag{6}$$

Enfin, on a $F(B) = (\frac{1}{2}\mathrm{Tr}(X)\mathbf{1} - X)B$, donc $\tilde{F}(B) = \tilde{B}(\frac{1}{2}\mathrm{Tr}(X)\mathbf{1} - X)$ et

$$F(B)\tilde{F}(B) = (\frac{1}{2}\mathrm{Tr}(X)\mathbf{1} - X)X(\frac{1}{2}\mathrm{Tr}(X)\mathbf{1} - X) = X^3 - \mathrm{Tr}(X)X^2 + \frac{1}{4}\mathrm{Tr}(X)^2X.$$

Prenant les traces, cela donne

$$\mathrm{Tr}(F(B)\tilde{F}(B)) = \tau_3 - \tau_1\tau_2 + \frac{1}{4}\tau_1^3. \tag{7}$$

On déduit alors aussitôt (4) de (5), (6) et (7).

Il résulte notamment de la formule ci-dessus que l'idéal engendré par les neuf premières équations $F_{i,j}$ de $\mathcal{V}$ contient la fonction $B \mapsto \det(B)^2$.

Pour $B \in \mathcal{M}$, posons

$$f(B) = \mathrm{Tr}(F(B)\tilde{B}) = \frac{1}{2}\mathrm{Tr}(B\tilde{B})^2 - \mathrm{Tr}((B\tilde{B})^2).$$

C'est un polynôme du quatrième degré en les coefficients de B. D'après la proposition ci-dessus, on a

$$\sum F_{i,j}(B)^2 = \mathrm{Tr}(F(B)\tilde{F}(B)) = -\frac{1}{2}\mathrm{Tr}(B\tilde{B})f(B) + 3\det(B)^2.$$

Si B appartient à $\mathcal{V}$, on a $F(B) = 0$, donc $f(B) = 0$. Inversement, si $f(B) = 0$ et $\det(B) = 0$, on a $\sum F_{i,j}(B)^2 = 0$. Si B est réel, alors les $F_{i,j}(B)$ sont réels et cette dernière condition implique $F(B) = 0$, donc $B \in \mathcal{V}_{\mathbf{R}}$. Compte-tenu de 4.1, on obtient :

PROPOSITION 4.3 *(O.Faugeras) — Pour que $B \in \mathcal{M}_{\mathbf{R}}$ appartienne à $\mathcal{V}_{\mathbf{R}}$, c'est-à-dire soit de la forme $\varphi(R,t)$ avec $R \in \mathcal{R}_{\mathbf{R}}$ et $t \in E_{\mathbf{R}}$, il faut et il suffit qu'on ait $\det(B) = 0$ et $f(B) = 0$.*

5 Sous-variétés linéaires de $\mathcal{V}$

Nous nous proposons de déterminer les sous-variétes' linéaires de $\mathbf{P}E$ contenues dans $\mathbf{P}\mathcal{V}$ ou, ce qui revient au même, les sous-espaces vectoriels de E contenus dans $\mathcal{V}$. Si L est un tel sous-espace, il en est de même des sous-espaces $L^{\sim}$, RL et LR, avec $R \in \mathcal{R}$, où l'on pose évidemment

$$L^{\sim} = \{\tilde{B} | B \in L\}, \; RL = \{RB | B \in L\} \; , LR = \{BR | B \in L\}. \tag{8}$$

Remarquons par ailleurs que, puisque la sous-variété $\mathcal{V}$ est définie par des équations cubiques, toute droite qui la coupe en plus de trois points y est contenue toute entière.

5.1 Exemples

L'ensemble T_E des T_t où t parcourt E est un sous-espace vectoriel de dimension 3 de $\mathcal{M}$ contenu dans $\mathcal{V}$. On a $T_E^{\sim} = T_E$ et $T_E R = RT_E$. Il résulte de 3.1 que les sous espaces $T_E R$ sont tous distincts.

Soit $u \in E$ avec $u \neq 0$ et $(u|u) = 0$. L'ensemble $E\tilde{u}$ des $v\tilde{u}$, où v parcourt E est un sous-espace vectoriel de dimension 3 de $\mathcal{M}$ contenu dans $\mathcal{V}$. Il en est de même de l'ensemble $u\tilde{E}$ formé des $u\tilde{v}$. Deux vecteurs u proportionnels donnent les mêmes sous-espaces $E\tilde{u}$ (resp. $u\tilde{E}$). On a $(E\tilde{u})^{\sim} = uE$, $RE\tilde{u} = E\tilde{u}$, $E\tilde{u}R = E\widetilde{Ru}$, etc.

5.2 Les sous-espaces $\mathcal{M}_t$

Les deux lemmes suivants donnent d'autres exemples de sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}$ contenu dans $\mathcal{V}$.

Lemme 5.1 — *Soit $t \in E$ un vecteur non-isotrope. Notons $\mathcal{M}_t$ le sous-espace vectoriel de dimension 2 de $\mathcal{M}$ dont T_t et T_t^2 forment une base. Alors $\mathcal{M}_t$ est contenu dans $\mathcal{V}$: c'est l'adhérence de l'ensemble $\mathbf{C}T_t\mathcal{R}_t^+$ formé des $\lambda T_t R$, où λ parcourt $\mathbf{C}$ et où R parcourt le sous-groupe $\mathcal{R}_t^+$ de $\mathcal{R}$. Pour tout $B \in \mathcal{M}_t$, on a $Bt = 0$ et $B(E) \subset t^{\perp}$.*

On peut supposer que $(t|t) = 1$. Choisissons alors une base orthonormée directe (e_1, e_2, e_3) avec $t = e_1$. Alors l'ensemble $\mathbf{C}T_t\mathcal{R}_t^+$ est formé des matrices

$$\lambda \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & -\beta \\ 0 & -\beta & \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda\beta & \lambda\alpha \\ 0 & -\lambda\alpha & \lambda\beta \end{pmatrix} = \lambda\alpha T_t - \lambda\beta T_t^2,$$

où α, β et λ sont trois scalaires tels que $\alpha^2 + \beta^2 = 1$. On conclut aussitôt.

Lemme 5.2 — *Soit $t \in E$ un vecteur isotrope non-nul et soit $\mathcal{M}_t$ le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}$ formé des $B \in \mathcal{M}$ tels que $Bt = 0$, $B(t^\perp) \subset \mathbf{C}t$ et $B(E) \subset t^\perp$. Alors $\mathcal{M}_t$ est de dimension 3 et est contenu dans $\mathcal{V}$: c'est l'adhérence de l'ensemble $\mathbf{C}T_t\mathcal{R}_t$ formé des $\lambda T_t R$, où λ parcourt $\mathbf{C}$ et où R parcourt le sous-groupe $\mathcal{R}_t$.*

Choisissons des vecteurs u et e avec les propriétés du lemme 2.3 : on a $(u|u) = (e|t) = (e|u) = 0$, $(e|e) = -1$, $(t|u) = 2$. Le sous-espace $\mathcal{M}_t$ est formé des applications linéaires de la forme $(t \mapsto 0,\ e \mapsto \alpha t,\ u \mapsto \beta e + \gamma t)$. On a vu en 2.7 que les éléments de $\mathcal{R}_t$ sont les $R_{\mu,\nu}$ avec

$$R_{\mu,\nu}t = \mu t,\ \ R_{\mu,\nu}e = e + \nu t,\ \ R_{\mu,\nu}u = \frac{1}{\mu}u + \frac{2\nu}{\mu}e + \frac{\nu^2}{\mu}t.$$

Cela donne $T_tR_{\mu,\nu}t = 0$, $T_tR_{\mu,\nu}e = \nu t$, $T_tR_{\mu,\nu}u = \frac{2}{\mu}e + \frac{2\nu}{\mu}t$. Ainsi, l'ensemble $\mathbf{C}T_t\mathcal{R}_t$ est bien dense dans $\mathcal{M}_t$. Comme il est contenu dans $\mathcal{V}$, il en est de même de $\mathcal{M}_t$.

THEOREME 5.3 — *Les sous-espaces T_ER (avec $R \in \mathcal{R}$), $E\tilde{u}$ (avec $u \neq 0$ et $(u|u) = 0$), $u\tilde{E}$ (avec $u \neq 0$ et $(u|u) = 0$) et $\mathcal{M}_tR$ (avec $t \neq 0$ et $R \in \mathcal{R}$) sont les sous-espaces vectoriels maximaux contenus dans $\mathcal{V}$.*

La démonstration utilisera plusieurs lemmes.

Lemme 5.4 — *Soient A et B deux éléments de $\mathcal{M}$ tels que $A + \lambda B$ soit de rang ≤ 1 pour tout scalaire λ. Il existe alors x, y et z dans E avec, soit $A = x\tilde{y}$ et $B = x\tilde{z}$, soit $A = x\tilde{z}$ et $B = y\tilde{z}$.*

Prenant $\lambda = 0$ et $\lambda = \infty$, on trouve que A et B sont de rang ≤ 1, et on peut écrire $A = x\tilde{y}$ et $B = u\tilde{v}$. Il s'agit de prouver que, soit y et v sont proportionnels, soit x et y sont proportionnels. Or, si y et v ne sont pas proportionnels, on peut trouver des vecteurs a et b avec $(y|a) = 1$, $(y|b) = 0$, $(v|a) = 0$ et $(v|b) = 1$. On a alors $(A + \lambda B)a = x$ et $(A + \lambda B)b = \lambda y$, ce qui impose, en prenant $\lambda \neq 0$, que x et y soient proportionnels.

Lemme 5.5 — *Soient A, B et C trois éléments de $\mathcal{M}$ tels que $A + \lambda B + \lambda^2 C$ soit symétrique et de rang ≤ 1 pour tout scalaire λ. Alors, ou bien il existe x et y dans E avec $A = x\tilde{x}$, $B = x\tilde{y} + y\tilde{x}$ et $C = y\tilde{y}$, c'est-à-dire $A + \lambda B + \lambda^2 C = (x + \lambda y)(x + \lambda y)\tilde{}$, ou bien il existe $x \in E$ tels que A, B et C soient proportionnels à $x\tilde{x}$.*

La condition donnée impose d'abord que A et C sont symétriques et de rang ≤ 1, donc qu'il existe x et y avec $A = x\tilde{x}$ et $C = y\tilde{y}$.

Supposons d'abord que x et y ne soient pas proportionnels. Il existe alors des vecteurs a et b avec $(x|a) = 1$, $(x|b) = 0$, $(y|a) = 0$ et $(y|b) = 1$. Posant $U(\lambda) = A + \lambda B + \lambda^2 C$, on en déduit

$$U(\lambda)a = x + \lambda Ba, \quad U(\lambda)b = \lambda(Bb + \lambda y).$$

Ainsi, les deux vecteurs $x+\lambda Ba$ et $\lambda(Bb+\lambda y)$ doivent être proportionnels pour tout λ. Cela impose que Ba s'écrive αy et Bb s'écrive βx, avec $\alpha\beta = 1$. Mais, puisque $(b|U(\lambda)a) = \lambda(b|Ba) = \lambda\alpha$ et de même $(a|U(\lambda)b) = \lambda(a|Bb) = \lambda\beta$, on doit avoir $\alpha = \beta = \pm 1$. Changeant x en $-x$ si nécessaire, on obtient $Ba = y$ et $Bb = x$, c'est-à-dire $B = x\tilde{y} + y\tilde{x} + B'$, avec $B'a = B'b = 0$. Comme cette dernière condition est vraie pour tous les choix possibles de a et b, elle impose $B' = 0$.

Il reste à traiter le cas où x et y sont proportionnels. On notera que si A ou C est nul, alors la conclusion résulte du lemme précédent. On peut donc supposer que x et y sont non nuls, de sorte que $y = \gamma x$ avec $\gamma \in \mathbf{C}$ et $\gamma \neq 0$. Pour tout vecteur a, on a alors $U(\lambda)a = (1+\lambda^2\gamma^2)(x|a)x + \lambda Ba$. Par conséquent, l'application $B + \frac{1+\lambda^2\gamma^2}{\lambda}x\tilde{x}$ doit être symétrique et de rang ≤ 1 pour tout λ, ce qui impose que B soit proportionnel à $x\tilde{x}$.

Lemme 5.6 — *Soient t et t' deux vecteurs non nuls de E, et soient R et R' dans $\mathcal{R}$. Supposons que $\lambda\varphi(R,t) + \lambda'\varphi(R',t')$ appartienne à $\mathcal{V}$ pour tout couple de scalaires (λ,λ'). On est alors dans l'un des cas suivants:*

a) on a $R = R'$, auquel cas $\lambda\varphi(R,t) + \lambda'\varphi(R',t') = \varphi(R,\lambda t + \lambda' t')$;

b) on a $(t|t) \neq 0$ et $\sigma_t R = R'$, auquel cas $\lambda\varphi(R,t) + \lambda'\varphi(R',t') = \varphi(\sigma_t R, -\lambda t + \lambda' t')$;

c) on a $(t'|t') \neq 0$ et $R = \sigma_{t'} R'$, auquel cas $\lambda\varphi(R,t) + \lambda'\varphi(R',t') = \varphi(R,\lambda t - \lambda' t')$;

d) on a $(t|t) \neq 0$, $(t'|t') \neq 0$ et $\sigma_t R = \sigma_{t'} R'$, auquel cas $\lambda\varphi(R,t) + \lambda'\varphi(R',t') = \varphi(\sigma_t R, -\lambda t - \lambda' t')$;

e) t et t' sont proportionnels et $(t|t) \neq 0$, auquel cas RR'^{-1} appartient à $\mathcal{R}_t^+$, et les deux matrices $\varphi(R,t$ et $\varphi(R',t')$ appartiennent au sous-espace $\mathcal{M}_t R = \mathcal{M}_{t'} R'$ de dimension 2 ;

f) t et t' sont proportionnels et $(t|t) = 0$, auquel cas RR'^{-1} appartient à $\mathcal{R}_t$ et les deux matrices $\varphi(R,t)$ et $\varphi(R',t')$ appartiennent au sous-espace $\mathcal{M}_t R = \mathcal{M}_{t'} R'$ de dimension 3.

On a $\lambda\varphi(R,t)+\lambda'\varphi(R',t') = (T_{\lambda t}RR'^{-1} + \lambda' T_{t'})R'$, ce qui, en changeant de notations, nous ramène à traiter le problème suivant : déterminer les triplets (R,t,t') tels que $T_t R + \lambda T_{t'}$ appartienne à $\mathcal{V}$ pour tout $\lambda \in \mathbf{C}$.

Posons $B(\lambda) = T_t R + \lambda T_{t'}$. On a $-B(\lambda)\tilde{B}(\lambda) = T_t^2 + \lambda(T_t R T_{t'} + T_{t'}\tilde{R}T_t) + \lambda^2 T_{t'}^2$, d'où

$$-B(\lambda)\tilde{B}(\lambda) + \frac{1}{2}\mathrm{Tr}(B(\lambda)\tilde{B}(\lambda))\mathbf{1} = t\tilde{t} + \lambda(T_t R T_{t'} + T_{t'}\tilde{R}T_t - \mathrm{Tr}(T_t R T_{t'})\mathbf{1}) + \lambda^2 t'\tilde{t}'.$$

D'après 3.4, l'expression précédente est de rang ≤ 1 pour toute valeur de λ, et si on choisit $\varphi(\lambda) \in E$ tel que

$$\varphi(\lambda)\tilde{\varphi}(\lambda) = t\tilde{t} + \lambda(T_t R T_{t'} + T_{t'}\tilde{R}T_t - \mathrm{Tr}(T_t R T_{t'})\mathbf{1}) + \lambda^2 t'\tilde{t}', \tag{9}$$

on a

$$B(\lambda)\tilde{B}(\lambda) = -T_{\varphi(\lambda)}^2, \quad \tilde{B}(\lambda)\varphi(\lambda) = 0. \tag{10}$$

Supposons d'abord que t et t' ne soient pas proportionnels. D'après le lemme précédent, on peut trouver $\epsilon = \pm 1$ tel que $\varphi(\lambda) = t + \epsilon\lambda t'$ satisfasse à (9) et on a alors

$$T_t R T_{t'} + T_{t'}\tilde{R}T_t - \mathrm{Tr}(T_t R T_{t'})\mathbf{1} = \epsilon(t\tilde{t}' + t'\tilde{t}).$$

Calculant les traces des deux membres de cette dernière relation et éliminant, on obtient alors

$$T_tRT_{t'} + T_{t'}\tilde{R}T_t = \epsilon(t\tilde{t}' + t'\tilde{t} + ((t|t') + (t'|t))\mathbf{1}) = \epsilon(T_tT_{t'} + T_{t'}T_t),$$

En définitive, on a $T_t(R - \epsilon\mathbf{1})T_{t'} + T_{t'}(\tilde{R} - \epsilon\mathbf{1})T_t = 0$, ou encore $T_t(R - \epsilon\mathbf{1})T_{t'} = T_v$ pour un $v \in E$ convenable.

Par ailleurs, la relation $\tilde{B}(\lambda)\varphi(\lambda) = 0$ s'écrit aussi $(\tilde{R}T_t+\lambda T_{t'})(t+\epsilon\lambda t') = 0$, soit $\tilde{R}T_tt'+\epsilon T_{t'}t = 0$, ou encore $R(t \wedge t') = \epsilon t \wedge t'$. Il en résulte que $t \wedge v = T_vt = T_t(R - \epsilon\mathbf{1})T_{t'}t = T_t(R - \epsilon\mathbf{1})(t \wedge t') = 0$, et de même $t' \wedge v = 0$. Donc $v = 0$ et $T_tRT_{t'} = \epsilon T_tT_{t'}$. Il existe donc u avec $RT_{t'} = \epsilon T_{t'} + t\tilde{u}$. Mais, puisque $RT_{t'}t = R(t \wedge t') = \epsilon t \wedge t' = \epsilon T_{t'}t$ et que $RT_{t'}t' = 0 = T_{t'}t'$, on a $(u|t') = (u|t) = 0$, donc $u = -\beta t \wedge t' = -\beta T_{t'}t$. Cela donne $RT_{t'} = \epsilon T_{t'} + \beta t\tilde{t}T_{t'}$, soit $R = \epsilon\mathbf{1} + \beta t\tilde{t} + v\tilde{t}'$. On applique alors le lemme 2.2 et on obtient les cas a) à d).

Supposons maintenant que t et t' soient proportionnels et revenons aux relations (9) et (10). Le lemme précédent impose alors que $T_tRT_{t'} + T_{t'}\tilde{R}T_t - \mathrm{Tr}(T_tRT_{t'})\mathbf{1}$ soit proportionnel à $t\tilde{t}$, ce qu'on peut écrire aussi $T_tRT_t + T_t\tilde{R}T_t - \mathrm{Tr}(T_tRT_t)\mathbf{1} = 2\alpha t\tilde{t}$ avec $\alpha \in \mathbf{C}$ convenable, ou encore $T_t(R + \tilde{R} - \alpha\mathbf{1})T_t = 0$, ce qui signifie que la matrice $A = R + \tilde{R} - 2\alpha\mathbf{1}$ applique le plan orthogonal à t dans la droite engendrée par t, ou encore que $(x|Ay) = 0$ pour tous vecteurs x et y orthogonaux à t. Distinguons alors deux cas suivant que $(t|t)$ est nul ou non.

Supposons dans un premier temps $(t|t) \neq 0$. Il existe une base orthonormée directe (e_1, e_2, e_3) avec t proportionnel à e_1. Les conditions données sur A s'écrivent donc

$$(e_2|Ae_2) = 0,\ (e_2|Ae_3) = 0,\ (e_3|Ae_2) = 0,\ (e_3|Ae_3) = 0,$$

soit encore, par un calcul immédiat $(e|Re_2) = (e_3|Re_3) = \alpha$, $(e_2|Re_3) = -(e_3|Re_2)$. Ainsi, on peut écrire $Re_2 = xe_1+\alpha e_2+\beta e_3$ et $Re_3 = ye_1-\beta e_2+\alpha e_3$. Mais cela impose $xy = (Re_2|Re_3) = (e_2|e_3) = 0$ et $x^2 = (Re_2|Re_2)-\alpha^2-\beta^2 = 1-\alpha^2-\beta^2 = (Re_3|Re_3)-\alpha^2-\beta^2 = y^2$. Par conséquent, x et y sont nuls et on a $\alpha^2+\beta^2 = 1$. Mais $(R^{-1}e_1|e_2) = (e_1|Re_2) = x = 0$ et de même $(R^{-1}e_1|e_3) = (e_1|Re_3) = y = 0$. Par conséquent, $R^{-1}e_1$ est proportionnel à e_1, donc égal à ϵe_1, ce qui implique $Rt = \epsilon t$. Dans la base choisie, on a

$$R = \begin{pmatrix} \epsilon & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & -\beta \\ 0 & \beta & \alpha, \end{pmatrix}$$

donc $\epsilon = \det(R) = 1$. En définitive, on a $R \in \mathcal{R}_t^+$, et on peut appliquer le lemme 5.2. On en déduit le cas e).

Supposons enfin que $(t|t) = 0$. Choisissons des vecteurs u et e avec les propriétés du lemme 2.3 : on a $(u|u) = (e|t) = (e|u) = 0$, $(e|e) = -1$, $(t|u) = 2$. L'orthogonal de t est engendré par t et e. La condition donnée sur A donne $(t|At) = 0$, c'est-à-dire $(t|Rt) + (t|\tilde{R}t) = 0$ donc $(t|Rt) = 0$. Ainsi Rt est combinaison linéaire de t et e ; mais $(Rt|Rt) = (t|t) = 0$, donc $Rt = \mu t$ et R appartient à $\mathcal{R}_t$. Cela donne le cas f) et achève la démonstration.

Passons à la démonstration du théorème. Comme il est immédiat qu'il n'y a pas de relation d'inclusion stricte entre les sous-espaces de la liste donnée, il suffit de prouver que tout sous-espace vectoriel L de $\mathcal{M}$ contenu dans $\mathcal{V}$ est contenu dans l'un des sous-espaces de cette liste. Comme cela est clair (théorème 3.3) si $\dim(L) \leq 1$, on peut supposer que $\dim(L) \geq 2$.

a) Supposons d'abord que l'on ait $\mathrm{rg}(B) \leq 1$ pour tout élément B de L. Soit $B \in L$ non nul. Alors B peut s'écrire $u\tilde{v}$ avec $(u|u)(v|v) = 0$ (théorème 3.3). Soit B' un élément de L non proportionnel à B. Il existe $w \in E$ avec, soit $B' = w\tilde{v}$ soit $B' = u\tilde{w}$ (lemme 5.4). Supposons pour fixer les idées que l'on soit dans le premier cas. Alors, pour tout $\lambda \in \mathbf{C}$, on a $(u+\lambda w)\tilde{v} = B + \lambda B' \in L \subset \mathcal{V}$, donc $(u+\lambda w|u+\lambda w)(v|v) = 0$ (théorème 3.3). Comme w n'est pas proportionnel à u, on ne peut pas avoir $(u+\lambda w|u+\lambda w) = 0$ pour tout λ. Cela impose donc $(v|v) = 0$, et B et B' appartiennent tous deux à $E\tilde{v}$. De même, dans le cas où $B' = u\tilde{w}$, on a $(u|u) = 0$, et B et B' appartiennent tous deux à $u\tilde{E}$. En conclusion, on est dans l'un des trois cas suivants :

1) $(u|u) \neq 0$; alors $(v|v) = 0$ et $L \subset E\tilde{v}$.

2) $(v|v) \neq 0$; alors $(u|u) = 0$ et $L \subset u\tilde{E}$.

3) $(u|u) = (v|v) = 0$; alors $L \subset E\tilde{v} \cup u\tilde{E}$. Mais un espace vectoriel qui est contenu dans une réunion de deux sous-espaces est contenu dans l'un d'eux.

b) Supposons qu'il existe $B \in L$ avec $\mathrm{rg}(B) = 2$. Ecrivons $B = \varphi(R,t)$ (théorème 3.3). Si $(t|t) \neq 0$, on a aussi $B = \varphi(\sigma_t R, -t)$. Il suffit de prouver que l'on a $B' \in T_E R \cup \mathcal{M}_t R$ si $(t|t) = 0$, et $B' \in T_E R \cup T_E \sigma_t R \cup \mathcal{M}_t R$ si $(t|t) \neq 0$. Mais les éléments B' de L tels que $\mathrm{rg}(B') = 2$ forment un ouvert dense de L et il suffit de vérifier les appartenances précédentes lorsque $\mathrm{rg}(B') = 2$. Ecrivons alors $B' = \varphi(R',t')$ (théorème 3.3). Pour tout couple de scalaires (λ, λ'), on a $\lambda\varphi(R,t) + \lambda'\varphi(R',t') \in L \subset \mathcal{V}$ et la conclusion cherchée résulte du lemme 5.6.

COROLLAIRE 5.7 — *A chaque élément R de $\mathcal{R}_{\mathbf{R}}$ est associé un plan de $\mathbf{P}E_{\mathbf{R}}$, contenu dans $\mathbf{P}\mathcal{V}_{\mathbf{R}}$, formé des images des points $T_t R$ pour $t \in E_{\mathbf{R}}$. On obtient ainsi tous les plans contenus dans $\mathbf{P}\mathcal{V}_{\mathbf{R}}$. Outre les droites des plans précédents, les droites contenues dans $\mathbf{P}\mathcal{V}_{\mathbf{R}}$ sont associées aux points de $\mathbf{P}E_{\mathbf{R}}$: à $t \in E_{\mathbf{R}}$, on associe la droite qui joint les points images de T_t et T_t^2.*

6 Le degré de $\mathcal{V}$

Soit $t \in E$ avec $(t|t) \neq 0$. Notons $N_t \subset \mathcal{M}$ le sous-espace vectoriel de dimension 4 de $\mathcal{M}$ formé des $B \in \mathcal{M}$ satisfaisant aux deux conditions $Bt \in t^{\perp}$ et $B(t^{\perp}) \subset \mathbf{C}t$. Le sous-espace N_t ne dépend que de la droite engendrée par t, et on peut supposer que l'on a $(t|t) = 1$, ce que nous faisons désormais. Puisque les sous-espaces $\mathbf{C}t$ et $t^{\perp}$ sont supplémentaires, la donnée d'un élément B de N_t équivaut à celle des deux vecteurs $u = Bt \in t^{\perp}$ et $v = \tilde{B}t \in t^{\perp}$. On a en effet

$$Bx = (x|t)u + (x|v)t, \quad x \in E.$$

Soit $Q_t \subset \mathcal{V}$ la sous-variété conique

$$Q_t = N_t \cap \mathcal{V} = \{B \in \mathcal{V} \mid Bt \in t^\perp,\ B(t^\perp) \subset \mathbf{C}t\}.$$

Lemme 6.1 — *Q_t est un cône quadratique de dimension 3. Ses points sont les transformations de la forme $x \mapsto (x|t)u + (x|v)t$ où u et v sont deux vecteurs de $t^\perp$ tels que $(u|u) = (v|v)$. Ce sont aussi les éléments de l'une des trois formes suivantes :*

a) les $\varphi(R, w)$ avec $w \in t^\perp$ et $R \in \mathcal{R}_t$;

b) les $u\tilde{t}$ avec $u \in t^\perp$ et $(u|u) = 0$ (ces éléments forment deux droites) ;

c) les $t\tilde{v}$ avec $v \in t^\perp$ et $(v|v) = 0$ (ces éléments forment deux droites).

Représentons les éléments B de $\mathcal{M}$ par leurs matrices dans la décomposition de E en somme directe de la droite $\mathbf{C}t$ et du plan $t^\perp$. Ce sont des matrices d'ordre 2, de la forme

$$B = \begin{pmatrix} \alpha & \tilde{v} \\ u & A \end{pmatrix},$$

où α est un scalaire, u et v sont deux vecteurs de $t^\perp$ et A une application linéaire de $t^\perp$ dans lui-même. Si B est dans N_t, on a $\alpha = 0$ et $A = 0$, donc

$$B\tilde{B} = \begin{pmatrix} 0 & \tilde{v} \\ u & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \tilde{u} \\ v & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (v|v) & 0 \\ 0 & u\tilde{u} \end{pmatrix},$$

et $\mathrm{Tr}(B\tilde{B}) = (u|u) + (v|v)$. Un calcul facile donne

$$F(B) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & ((u|u) - (v|v))\tilde{v} \\ ((v|v) - (u|u))u & 0 \end{pmatrix},$$

ce qui entraine la première assertion de l'énoncé.

Lorsque u ou v est nul, on trouve les éléments des formes b) et c). Supposons que u et v soient non nuls.

Dire que $(u|u) = (v|v)$ signifie aussi qu'il existe $S \in \mathcal{R}_t$ tel que $Sv = -u$ (attention : si $(u|u) = (v|v) = 0$, on ne peut pas forcément trouver S dans $\mathcal{R}_t^+$). Si $St = t$, prenons $R = S$; si $St = -t$, prenons $R = \sigma_t S$. Dans les deux cas, on a $Rt = \epsilon t$ et $Rv = -\epsilon u$, et donc $Bx = (x|v)t - (x|Rt)Rv$. Les éléments de Q_t sont donc les transformations de la forme $Bx = (x|v)t - (x|Rt)Rv$, avec $v \in t^\perp$ et $R \in \mathcal{R}_t$.

D'un autre coté, pour $w \in t^\perp$ et $R \in \mathcal{R}_t$, on a $\varphi(R, w)x = Rx \wedge w$. Mais, R étant donné, la donnée d'un élément $w \in t^\perp$ équivaut à celle d'un élément $v \in t^\perp$ tel que $w = t \wedge Rv$. Pour achever la démonstration, il suffit donc de prouver que l'on a

$$(x|v)t - (x|Rt)Rv = Rx \wedge (t \wedge Rv)$$

pour tout $x \in E$, tout $v \in t^\perp$, et tout $R \in \mathcal{R}_t$. Notons Bx et $B'x$ les deux membres de l'identité à démontrer. Puisque B et B' appartiennent à N_t, il suffit de prouver que l'on a $Bt = B't$ et

$(Bx|t) = (B'x|t)$ pour tout $x \in t^\perp$. Or, la première relation s'écrit $-(t|Rt)Rv = Rt \wedge (t \wedge Rv)$, ce qui est clair, et la seconde s'écrit $(x|v) = (Rx \wedge (t \wedge Rv)|t)$. Mais on a $(Rx \wedge (t \wedge Rv)|t) = ((t \wedge Rv) \wedge t|Rx) = (Rv|Rx) = (v|x)$, et cela achève la démonstration.

Lemme 6.2 — *Supposons $t \in E_{\mathbf{R}}$, et soient a et b deux vecteurs de $E_{\mathbf{R}}$, non-orthogonaux à t et tels que $(t|a)^2(b|b) \neq (t|b)^2(a|a)$. Notons L le sous-espace de codimension 2 de $\mathcal{M}$ formé des B tels que $(Ba|b) = (Bb|a) = 0$. Alors l'intersection de $\mathbf{P}L$ avec la quadrique $\mathbf{P}Q_t$ est formée de deux points réels distincts.*

Si on introduit les vecteurs c et d de $t^\perp$ par

$$a = (t|a)(t/(t|t) + c), \; b = (t|b)(t/(t|t) + d),$$

on a $(c|c) \neq (d|d)$. Ecrivant comme ci-dessus les éléments de Q_t sous la forme $Bx = (x|t)u + (x|v)t$, où u et v appartiennent à $t^\perp$, on a $(Ba|b) = (a|t)(b|t)((u|d) + (v|c))$ et une formule analogue pour $(Bb|a)$. Il s'agit en définitive de déterminer quels sont les couples (u, v) d'éléments de $t^\perp$ satisfaisant aux trois conditions suivantes

$$(u|d) + (v|c) = 0, \; (u|c) + (v|d) = 0, \; (u|u) = (v|v).$$

Mais cela s'écrit aussi

$$(u + v|c + d) = 0, \; (u - v|c - d) = 0, \; (u + v|u - v) = 0.$$

Or les quatre vecteurs $u + v$, $u - v$, $c + d$, $c - d$ appartiennent à l'espace $t^\perp$ de dimension 2, et on a $(c + d|c - d) \neq 0$. Les trois conditions d'orthogonalité ci-dessus impliquent alors que l'un des deux vecteurs $u + v$ et $u - v$ est nul. On a donc $v = \epsilon u$ avec $\epsilon = \pm 1$, et les conditions à résoudre se ramenent à $(u|c + \epsilon d) = 0$. La conclusion annoncée en résulte aussitôt.

PROPOSITION 6.3 — *Soit (e_1, e_2, e_3) une base orthonormée directe de E. La section de $\mathcal{V}$ par le sous-espace vectoriel N de $\mathcal{M}$ de codimension 3 formé des applications B telles que $(Be_1|e_1) = (Be_2|e_2) = (Be_3|e_3) = 0$ possède sept composantes irréductibles, toutes de dimension 3 et de multiplicité 1, à savoir :*

les quatre plans T_E, $T_E\sigma_{e_1}$, $T_E\sigma_{e_2}$ et $T_E\sigma_{e_3}$,

les trois cônes quadratiques Q_{e_1}, Q_{e_2} et Q_{e_3}.

On peut évidemment se contenter de traiter le cas de la base canonique. Le sous-espace vectoriel N de $\mathcal{M}$ considéré est celui des matrices de diagonale nulle. Nous l'identifierons à $\mathbf{C}^6$ par l'intermédiaire du paramétrage suivant : une matrice générique de N sera

$$B = B(x, y, z, a, b, c) = \begin{pmatrix} 0 & z & -b \\ -c & 0 & x \\ y & -a & 0 \end{pmatrix}.$$

Nous allons déterminer la sous-variété $\mathcal{V} \cap N$ de N. On a $\det(B) = xyz - abc$ et $\mathrm{Tr}(B\tilde{B}) = a^2 + b^2 + c^2 + x^2 + y^2 + z^2$. Des calculs immédiats donnent

$$B\tilde{B} = \begin{pmatrix} cbx - ayz & z(a^2+b^2+z^2) & -b(b^2+x^2+z^2) \\ -c(c^2+x^2+y^2) & acy - bxz & x(b^2+c^2+x^2) \\ y(a^2+c^2+y^2) & -a(a^2+y^2+z^2) & abz - cxy \end{pmatrix}.$$

Les dix équations de $\mathcal{V} \cup N$ sont donc

$$\begin{aligned} & ayz = bcx, \quad abz = cxy, \quad bxz = acy, \quad abc = xyz, \\ & a(a^2 - b^2 - c^2 - x^2 + y^2 + z^2) = 0, \quad x(a^2 - b^2 - c^2 - x^2 + y^2 + z^2) = 0, \\ & b(-a^2 + b^2 - c^2 + x^2 - y^2 + z^2) = 0, \quad y(-a^2 + b^2 - c^2 + x^2 - y^2 + z^2) = 0, \\ & c(-a^2 - b^2 + c^2 + x^2 + y^2 - z^2) = 0, \quad z(-a^2 - b^2 + c^2 + x^2 + y^2 - z^2) = 0. \end{aligned}$$

Notons au passage que ces dix équations sont linéairement indépendantes, car chaque monôme n'apparait au plus qu'une seule fois (ce qui prouve ce qui a été annoncé en 3.1). Posons $X = a^2 - x^2 = (a+x)(a-x)$ et de même $Y = b^2 - y^2$ et $Z = c^2 - z^2$. Les six dernières relations s'écrivent

$$\begin{aligned} & a(Y + Z - X) = 0, \quad x(Y + Z - X) = 0, \\ & b(X + Z - Y) = 0, \quad y(X + Z - Y) = 0, \\ & c(X + Y - Z) = 0, \quad z(X + Y - Z) = 0. \end{aligned}$$

On a par ailleurs $a^2yz = a(ayz) = a(bcx) = x(abc) = x(xyz) = x^2yz$, donc $Xyz = 0$. On déduit ainsi des quatre premières équations douze relations $Xbc = 0$, $Xbz = 0$, $Xyc = 0$, $Xyz = 0$, $Yac = 0$, $Yaz = 0$, $Yxc = 0$, $Yxz = 0$, $Zab = 0$, $Zay = 0$, $Zxb = 0$, $Zxy = 0$, dont les premiers membres sont des produits de quatre formes linéaires.

Raisonnons d'abord ensemblistement. Si $x = a = 0$, alors $X = 0$ et les équations à résoudre se résument à $(Z - Y)y = 0$, $(Z - Y)z = 0$, $(Z - Y)b = 0$, $(Z - Y)c = 0$, ce qui donne $Z = Y$. On obtient ainsi le cône quadratique d'équations $x = 0$, $a = 0$ et $c^2 + y^2 = b^2 + z^2$, qui n'est autre que Q_{e_1}. On raisonne de même si $y = b = 0$ ou $z = c = 0$ et on obtient les deux cônes quadratiques Q_{e_2} et Q_{e_3}.

Si x ou a n'est pas nul, ainsi que y ou b, ainsi que z ou c, on obtient $X = Y = Z = 0$, soit $x = \epsilon a$, $y = \epsilon' b$ et $z = \epsilon'' c$ avec $\epsilon = \pm 1$, $\epsilon' = \pm 1$, $\epsilon'' = \pm 1$. Reportant dans $abc = xyz$, on obtient $\epsilon\epsilon'\epsilon'' = 1$. Cela donne quatre 3-plans. Le plan $x - a = y - b = z - c = 0$ est formé des matrices antisymétriques ; c'est donc T_E. Le plan $x - a = y + b = z + c = 0$ est formé des matrices

$$\begin{pmatrix} 0 & z & y \\ z & 0 & x \\ y & -x & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -z & -y \\ z & 0 & -x \\ y & x & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

et on reconnait $T_E\sigma_{e_1}$. Les deux autres plans sont de même $T_E\sigma_{e_2}$ et $T_E\sigma_{e_3}$.

Montrons maintenant que les six composantes irréductibles ainsi déterminées sont de multiplicité 1 et plus précisément qu'en chaque point de $N \cap \mathcal{V}$ qui n'appartient qu'à une seule des composantes, $\mathcal{V} \cap N$ coïncide algébriquement avec cette composante. En un point du cône quadratique

Q_{e_1} qui n'appartient à aucune autre composante, la fonction $Y + Z - X$ qui vaut $2Y = 2(y^2 - b^2)$ est inversible. Les équations $a(Y + Z - X) = x(Y + Z - X) = 0$ donnent alors $a = x = 0$, donc $X = 0$. Les équations $b(X+Z-Y) = y(X+Z-Y) = c(X+Y-Z) = z(X+Y-Z) = 0$ donnent $b(Z-Y) = y(Z-Y) = c(Z-Y) = z(Z-Y) = 0$, donc $Z = Y$. De même, en un point par exemple du plan $x - a = y - b = z - c = 0$ qui n'appartient à aucune autre composante, les fonctions a, b, c, x, y, z, $x + a$, $y + b$ et $z + c$ sont inversibles, et on conclut aussitôt.

Puisque la variété $\mathcal{V} \cap N$ est de degré $4 \times 1 + 3 \times 2 = 10$, on en déduit :

THEOREME 6.4 — *Le cône $\mathcal{V}$ est de degré* 10. *De manière équivalente, la variété projective $\mathbf{P}\mathcal{V}$ est de degré* 10.

Par conséquent, une sous-variété linéaire L de codimension 5 générale de $\mathcal{M}$ coupe $\mathcal{V}$ le long de dix droites vectorielles ; de manière équivalente, une sous-variété linéaire projective $\mathbf{P}L$ de codimension 5 générale de $\mathbf{P}\mathcal{M}$ coupe $\mathbf{P}\mathcal{V}$ en dix points. De plus, pour un choix convenable de L, ces dix points sont réels. Plus précisément, à chaque système S de dix vecteurs $a_1, \ldots, a_5, b_1, \ldots, b_5$ de $E_{\mathbf{R}}$, associons le sous-espace $L(S)$ de $\mathcal{M}$ formé des B tels que $(B(a_i)|b_i) = 0$ pour $i = 1, \ldots, 5$.

PROPOSITION 6.5 — *L'ensemble des S tels que le sous-espace $L(S)$ soit de codimension* 5 *et que l'intersection de $\mathbf{P}\mathcal{V}$ avec $\mathbf{P}L(S)$ soit transversale et formée de dix points réels appartenant tous à l'image de φ, est un ouvert non-vide de $E_{\mathbf{R}}^{10}$.*

Le fait que cet ensemble soit ouvert résulte du théorème des fonctions implicites. Il s'agit de prouver qu'il est non vide. Choisissons une base orthonormée directe (e_1, e_2, e_3) de $E_{\mathbf{R}}$, et posons $a_i = b_i = e_i$ pour $i = 1, 2, 3$. Notons comme ci-dessus N le sous-espace vectoriel de codimension 3 de $\mathcal{M}$ formé des applications B telles que $(Be_1|e_1) = (Be_2|e_2) = (Be_3|e_3) = 0$.

Soient par ailleurs α, β et γ trois nombres réels non-nuls et distincts satisfaisant aux conditions suivantes :

$$2\alpha^2 \neq \beta^2 + \gamma^2,\ 2\beta^2 \neq \alpha^2 + \gamma^2,\ 2\gamma^2 \neq \alpha^2 + \beta^2,$$

et posons

$$a_4 = e_1 + e_2 + e_3,\ b_4 = \alpha e_1 + \beta e_2 + \gamma e_3.$$

Notons N' le sous-espace vectoriel de codimension 4 de N formé des $B \in N$ tels que $(Ba_4|b_4) = 0$. Pour chaque couple (a, b) de vecteurs de $E_{\mathbf{R}}$, notons $D_{a,b}$ le sous-espace (de codimension 1 ou 0) de N' défini par la condition $(Ba|b) = 0$. Nous allons montrer qu'il existe a et b tels que $\mathbf{P}D_{a,b}$ coupe $\mathbf{P}N' \cap \mathbf{P}\mathcal{V}$ en dix points réels distincts appartenant tous à l'image de φ, ce qui suffira. On peut exhiber un tel couple explicitement, mais on peut aussi raisonner comme suit.

D'après la proposition 6.3, $\mathbf{P}N' \cap \mathbf{P}\mathcal{V}$ est la réunion de quatre droites et de trois coniques. D'après le lemme 6.2, chacune des coniques coupe $\mathbf{P}D_{b_4,a_4}$ en deux points réels distincts. Le système des $\mathbf{P}D_{a,b}$ étant sans point fixe, on peut trouver a et b tels que $\mathbf{P}D_{a,b}$ coupe chacune des trois coniques en deux points réels distincts, et évite l'ensemble fini des points suivants : les points d'intersection de deux des sept courbes considérées, les éventuels points doubles des coniques (en fait, elles sont non-singulières), les points des coniques qui n'appartiennent pas à l'image de φ. Alors a et b conviennent.

7 La variété $\mathcal{W}$

7.1 Définitions

Notons $\mathcal{B}$ l'espace vectoriel (de dimension 27) des applications bilinéaires $E \times E \to E$. A chaque couple (R, S) d'éléments de $\mathcal{R}$ et chaque scalaire non-nul $\lambda \in \mathbf{C}^*$, associons l'application $A \in \mathcal{B}$ définie par

$$A(x, y) = \lambda Rx \wedge Sy.$$

Lemme 7.1 — *L'application $(\lambda, R, S) \mapsto A$ ainsi définie est injective.*

Supposons en effet donnés λ et λ' non-nuls dans $\mathbf{C}$, ainsi que R, S, R', S' dans $\mathcal{R}$ avec $\lambda Rx \wedge Sy = \mu\lambda' R'x \wedge S'y$ pour tout (x, y). Posant $\mu = \lambda^{-1}\lambda' \in \mathbf{C}^*$, $U = RR'^{-1} \in \mathcal{R}$ et $V = S'S^{-1} \in \mathcal{R}$, on a donc $Ux \wedge y = \mu x \wedge Vy$ pour tout (x, y). Si U est différent de $\mathbf{1}$, il existe x tel que Ux ne soit pas colinéaire à x ; prenant alors y hors du plan engendré par x et Ux, on obtient une contradiction. On a ainsi $U = \mathbf{1}$ et de même $V = \mathbf{1}$, donc $\mu = 1$.

Nous noterons $\mathcal{W}$ la plus petite sous-variété algébrique fermée de $\mathcal{B}$ contenant l'image $\mathcal{W}_{gen}$ de l'application précédente. C'est un cône irréductible de dimension 7.

Notons H le groupe algébrique $\mathbf{C}^* \times \mathcal{R} \times \mathcal{R} \times \mathcal{R}$. Il opère sur $\mathcal{B}$ de la façon suivante. L'élément (λ, R, S, T) de H transforme l'application A en l'application $(x, y) \mapsto \lambda T(A(R^{-1}x, S^{-1}y))$. Alors $\mathcal{W}_{gen}$ est l'orbite de l'application $(x, y) \mapsto x \wedge y$, donc est ouverte dans son adhérence $\mathcal{W}$ pour la topologie de Zariski. Le complémentaire de $\mathcal{W}_{gen}$ dans $\mathcal{W}$ est donc une sous-variété algébrique fermé de $\mathcal{W}$, de dimension ≤ 6, réunion d'orbites de H. Nous la déterminerons ci-dessous.

L'application bijective $\mathbf{C}^* \times \mathcal{R} \times \mathcal{R} \to \mathcal{W}_{gen}$ est un isomorphisme de variétés algébriques (car c'est l'application obtenue par l'action du groupe algébrique $\mathbf{C}^* \times \mathcal{R} \times \mathcal{R}$ sur l'élément $(x, y) \mapsto x \wedge y$). De même, l'application de $\mathcal{R} \times \mathcal{R}$ dans l'espace projectif $\mathbf{P}\mathcal{B}$ qu'on en déduit induit un isomorphisme de variétés algébriques de $\mathcal{R} \times \mathcal{R}$ sur l'ouvert $\mathbf{P}\mathcal{W}_{gen}$ de la variété projective irréductible $\mathbf{P}\mathcal{W}$, de dimension 6.

7.2 327 équations

On peut obtenir des polynômes nuls sur $\mathcal{W}$ de la façon suivante. Remarquons d'abord que l'on peut aussi considérer $\mathcal{B}$ comme l'espace des formes trilinéaires sur E : à $A \in \mathcal{B}$, on associe la forme trilinéaire F telle que $F(x,y,z) = (A(x,y)|z)$. Mais on peut déduire inversement d'une forme trilinéaire F six applications linéaires de E dans $\mathcal{M}$. A transposition près, on déduit ainsi de tout élément $A \in \mathcal{B}$ trois telles applications linéaires $E \to \mathcal{M}$. De façon précise, soit $A \in \mathcal{B}$. On note $A_{x.}$, $A_{.y}$ et $A^z_{.}$ les trois éléments de $\mathcal{M}$ donnés par

$$A_{x.} : y \mapsto A(x,y), \quad A_{.y} : x \mapsto A(x,y), (A^z_{.}(x)|y) = (A(x,y)|z)$$

Dans le cas où $A(x,y) = \lambda Rx \wedge Sy$, on a $A_{x.} = \varphi(S, \lambda Rx)$, $A_{.y} = \varphi(R, -\lambda Sy)$ et $A^z_{.} = \varphi(\tilde{S}R, \lambda\tilde{S}z)$, ce qui donne

$$\begin{aligned} A_{x.} &\in \mathcal{V}, \quad \mathrm{Tr}(A_{x.}\tilde{A}_{x.}) = 2\lambda^2(x|x), \\ A_{.y} &\in \mathcal{V}, \quad \mathrm{Tr}(A_{.y}\tilde{A}_{.y}) = 2\lambda^2(y|y), \\ A^z_{.} &\in \mathcal{V}, \quad \mathrm{Tr}(A^z_{.}\tilde{A}^z_{.}) = 2\lambda^2(z|z). \end{aligned}$$

Par conséquent, tout élément A de $\mathcal{W}_{gen}$, donc aussi tout élément A de $\mathcal{W}$, satisfait aux trois conditions suivantes :

a) on a $\mathrm{Tr}(A_{x.}\tilde{A}_{x.}) = \mathrm{Tr}(A_{.x}\tilde{A}_{.x}) = \mathrm{Tr}(A^x_{.}\tilde{A}^x_{.})$ pour tout $x \in E$;

b) les formes quadratiques (égales) précédentes sont proportionnelles à la forme standard $(x|x)$;

c) pour tout $x \in E$, on a $A_{x.} \in \mathcal{V}$, $A_{.x} \in \mathcal{V}$ et $A^x_{.} \in \mathcal{V}$.

Chacune de ces conditions se traduit par l'annulation d'expressions polynômiales en les coefficients de A. En effet :

a) L'identité des trois formes quadratiques ci-dessus donne douze équations quadratiques en les coefficients de A.

b) La proportionnalité de l'une de ces formes avec la forme $(x|x)$ s'exprime par l'annulation de $\binom{6}{2} = 15$ déterminants d'ordre 2, ce qui donne quinze équations quartiques en les coefficients de A.

c) La condition $A_{x.} \in \mathcal{V}$ pour tout $x \in E$ peut se traduire comme suit. Si g est l'une des dix équations de $\mathcal{V}$ dans $\mathcal{M}$ introduites plus haut, $g(A_{x.})$ est homogène de degré 3 en x, et son annulation équivaut à dix équations scalaires (car une forme cubique à trois variables possède dix coefficients). On obtient ainsi *cent* équations cubiques en les coefficients de A. On en obtient cent autres à partir de la condition $A_{.x} \in \mathcal{V}$ et cent autres à partir de la condition $A_{.}^x \in \mathcal{V}$.

7.3 L'orbite Z

On obtient en définitive 327 fonctions polynomiales nulles sur $\mathcal{W}$. Ces équations ne définissent pas $\mathcal{W}$, comme le montre l'exemple suivant. Soient t, t' et t'' trois vecteurs isotropes non-nuls. Notons $Z(t,t',t'')$ la partie de $\mathcal{B}$ formés des applications dont la forme trilinéaire associée satisfait aux conditions suivantes :

1) $F(t,E,E)=\{0\}$, $F(E,t',E)=\{0\}$, $F(E,E,t'')=\{0\}$,
2) $F(t^{\perp},t'^{\perp},E)=\{0\}$, $F(t^{\perp},E,t''^{\perp}E)=\{0\}$, $F(E,t'^{\perp},t''^{\perp})=\{0\}$,
3) $F(t^{\perp},E,E)\neq\{0\}$, $F(E,t'^{\perp},E)\neq\{0\}$, $F(E,E,t''^{\perp})\neq\{0\}$.

Lemme 7.2 — *La réunion Z des $Z(t,t',t'')$ est une orbite de H, de dimension 7. Tout élément de Z satisfait aux conditions a), b) et c) ci-dessus.*

Soit A un élément de Z, donc d'un $Z(t,t',t'')$. Notons d'abord que les droites engendrées par t, t' et t'' sont uniquement déterminées par A : par exemple, la première est le noyau de l'application qui à $x\in E$ associe $A_{x.}$.

Il existe des éléments de $\mathcal{R}$ qui amènent respectivement t' et t'' sur t (confer 2.8), donc un élément du groupe H qui amène A dans $Z(t,t,t)$. Supposons donc $A\in Z(t,t,t)$.

D'après 5.2, et les conditions 1) et 2), chacune des applications $A_{x.}$, $A_{.x}$ et A^x appartient à $\mathcal{M}_t$. On en déduit sans difficultés que A satisfait aux conditions a), b) et c).

Choisissons maintenant des vecteurs u et e avec les propriétés du lemme 2.3 : on a $(u|u)=(e|t)=(e|u)=0$, $(e|e)=-1$, $(t|u)=2$. Les conditions 1) et 2) signifient qu'il existe des scalaires α, β, γ et δ avec

$$A(t,t)=A(e,t)=A(u,t)=A(t,e)=A(t,u)=A(e,e)=0,$$
$$A(e,u)=\alpha t,\ A(u,e)=\beta t,\ A(u,u)=\gamma e+\delta t$$

Les conditions 3) signifient qu'aucun des trois scalaires α, β et γ n'est nul. Ainsi, $Z(t,t,t)$ s'identifie à $(\mathbf{C}^*)^3\times\mathbf{C}$, donc est de dimension 4.

Le stabilisateur de A dans H est, comme on l'a vu plus haut, contenu dans le sous-groupe $H_{(t)}=\mathbf{C}^*\times\mathcal{R}_t\times\mathcal{R}_t\times\mathcal{R}_t$, de codimension 3 dans G. Il nous suffit alors de prouver que $Z(t,t,t)$, est une orbite de $H_{(t)}$. Or cela résulte sans difficultés de la description de $Z(t,t,t)$ donnée ci-dessus et des formules décrivant $\mathcal{R}_t$ (voir 2.7).

Lemme 7.3 — *L'adhérence de $Z(t,t,t)$ contient les deux applications bilinéaires suivantes*

$$(x,y)\mapsto(e|x)(t|y)t,\quad (x,y)\mapsto(t|x\wedge y)t.$$

Un calcul immédiat montre en effet que ces applications sont de la forme donnée ci-dessus, avec respectivement $\alpha=\gamma=\delta=0$, $\beta=-2$ et $\alpha=2$, $\beta=-2$, $\gamma=\delta=0$.

7.4 Détermination de $\mathcal{W}$

Lemme 7.4 — *Les éléments non-nuls de $\mathcal{B}$ qui annulent toutes les équations polynomiales précédentes, c'est-à-dire qui satisfont aux trois conditions :*

a) on a $\mathrm{Tr}(A_{x.}\tilde{A}_{x.}) = \mathrm{Tr}(A_{.x}\tilde{A}_{.x}) = \mathrm{Tr}(A^{x}_{.}\tilde{A}^{x}_{.})$ *pour tout* $x \in E$ *;*

b) les formes quadratiques $\mathrm{Tr}(A_{x.}\tilde{A}_{x.})$ *et* $(x|x)$ *sur* E *sont proportionnelles ;*

c) on a $A_{.x} \in \mathcal{V}$, $Ax. \in \mathcal{V}$ *et* $A_{.}^{x} \in \mathcal{V}$ *pour tout* $x \in E$ *;*

forment 9 orbites de H, *à savoir :*

i) l'orbite $\mathcal{W}_{gen}$, *de dimension 7, formée des* A *pour lesquels existe* R *et* S *dans* $\mathcal{R}$ *et* λ *dans* $\mathbf{C}^*$ *avec* $A(x,y) = \lambda Rx \wedge Sy$;

ii) l'orbite de dimension 6 formée des A *pour lesquels il existe* $R \in \mathcal{R}$ *et deux vecteurs isotropes non-nuls* u *et* v, *avec* $A(x,y) = (u|x)v \wedge Ry$ *;*

ii') l'orbite de dimension 6 formée des A *pour lesquels il existe* $R \in \mathcal{R}$ *et deux vecteurs isotropes non-nuls* u *et* v, *avec* $A(x,y) = (u|y)v \wedge Rx$ *;*

ii") l'orbite de dimension 6 formée des A *pour lesquels il existe* $R \in \mathcal{R}$ *et deux vecteurs isotropes non-nuls* u *et* v, *avec* $A(x,y) = (u|x \wedge Ry)v$ *;*

iii) les 4 orbites, de dimension 6, 6, 6 et 5, formées des A *pour lesquels il existe trois vecteurs non-nuls* u, v *et* w, *dont deux au moins sont isotropes, avec* $A(x,y) = (u|x)(v|y)w$ *;*

iv) l'orbite Z, *de dimension 7.*

L'ensemble des $A_{x.}$ pour x dans E est un sous-espace vectoriel L de $\mathcal{M}$ contenu dans $\mathcal{V}$, et $x \mapsto A_{x.}$ est une application linéaire de E dans L. On a $\dim(L) > 0$. Supposons d'abord que $\dim(L) = 1$; il existe alors des éléments $u \in E$ et $B \in \mathcal{V}$, avec $A_{x.} = (u|x)B$, soit $A(x,y) = (u|x)By$. D'après 3.3, on a deux possibilités. Si B s'écrit $\varphi(R,t)$, on a $A(x,y) = (u|x)t \wedge Ry$; si B s'écrit $w\tilde{v}$, on a $A(x,y) = (u|x)(v|y)w$. Dans le premier cas, on a $A_{.y} = (t \wedge Ry)\tilde{u}$. Mais on a $\mathrm{Tr}(A_{.x}\tilde{A}_{.x}) = 2(u|x)^2(t|t)$ et $\mathrm{Tr}(A_{y.}\tilde{A}_{y.}) = (u|u)(t \wedge Ry|t \wedge Ry)$. La condition a) implique alors $(u|u) = (t|t) = 0$. On est donc dans le cas ii). Dans le second cas, on a $A_{x.} = (u|x)w\tilde{v}$, $A_{.y} = (v|y)w\tilde{u}$ et $A^{z}_{.} = (w|z)v\tilde{u}$. La condition c) implique alors, vu 3.3, que deux au moins des trois expressions $(u|u)$, $(v|v)$ et $(w|w)$ doivent être nulles, ce qui est le cas iii).

De même, l'ensemble des $A_{.y}$, où y parcourt E est un sous-espace vectoriel L' de $\mathcal{M}$ contenu dans $\mathcal{V}$ et $y \mapsto A_{.y}$ est une application linéaire de E dans L'. On voit comme ci-dessus que si $\dim(L') = 1$, on est dans l'un des deux cas ii') ou iii). On raisonne de même si l'espace L'' des $A^{z}_{.}$ est de dimension 1 et on obtient les cas ii") et iii).

Ces cas étant traités, nous pouvons supposer que l'on a $\dim(L) \geq 2$, $\dim(L') \geq 2$ et $\dim(L'') \geq 2$. Reprenons la classification des sous-espaces maximaux donnée dans 5.3. S'il existe $u \in E$ avec $(u|u) = 0$ et $L \subset u\tilde{E}$, alors $A^{z}_{.} = 0$ pour $z \in u^{\perp}$, dont $\dim(L'') = 1$, ce qui est exclus. S'il existe $u \in E$ avec $(u|u) = 0$ et $L \subset E\tilde{u}$, alors $A_{.y}$ est nul lorsque $(u|y) = 0$, donc $\dim(L') = 1$, ce qui est aussi exclus. De même si $L' \subset u\tilde{E}$ ou $L' \subset E\tilde{u}$. Ces cas étant ainsi éliminés, on déduit de 5.3 qu'il existe R et S dans $\mathcal{R}$ avec, d'une part, soit $L \subset T_E R$, soit $L \subset \mathcal{M}_t R$ pour un $t \in E$ bien choisi, et d'autre part, soit $L' \subset T_E S$, soit $L \subset \mathcal{M}_{t'} S$ pour un $t' \in E$ bien choisi. Comme on peut remplacer A par $(x,y) \mapsto A(R^{-1}x, S^{-1}y)$, il suffit de traiter le cas où $R = S = \mathbf{1}$.

Notons H l'espace engendré par les $A(x,y)$. Il est de dimension ≥ 2, car sinon on aurait $\dim(L'') = 1$. Puisque $\dim(L) \geq 2$, la condition $L \subset T_E$ implique $H = E$, et de même pour la condition $L' \subset T_E$, tandis que, puisque $\dim(H) \geq 2$, la condition $L \subset \mathcal{M}_t$ implique $H = t^\perp$ et de même pour la condition $L \subset \mathcal{M}_{t'}$. Il n'y a donc que deux possibilités : ou bien $L \subset T_E$ et $L' \subset T_E$, ou bien $L \subset \mathcal{M}_t$ et $L' \subset \mathcal{M}_{t'}$ avec de plus $t^\perp = t'^\perp$, ce qui signifie que t et t' sont proportionnels, donc que $\mathcal{M}_t = \mathcal{M}_{t'}$. Traitons maintenant les deux cas ainsi identifiés.

Supposons d'abord que L et L' soient contenus dans T_E. Il existe donc des éléments B et B' de $\mathcal{M}$ avec $A(x,y) = Bx \wedge y = x \wedge B'y$. Puisque $(x|Bx \wedge y) = 0$, c'est-à-dire $(y|x \wedge Bx) = 0$, Bx est proportionnel à x pour tout x, ce qui signifie qu'il existe $\lambda \in \mathbf{C}$ avec $B = \lambda\mathbf{1}$. Cela donne $x \wedge B'y = \lambda x \wedge y$, et donc aussi $B' = \lambda\mathbf{1}$, et on obtient le cas i).

Il nous reste à traiter le cas où il existe $t \in E$ tel que L et L' soient contenus dans $\mathcal{M}_t$. On ne peut avoir d'abord $(t|t) \neq 0$; en effet, on aurait en ce cas $\dim(\mathcal{M}_t) = 2$ donc $L = \mathcal{M}_t$; mais, comme on le vérifie sans difficultés, la forme quadratique $A \mapsto \mathrm{Tr}(A\check{A})$ sur $\mathcal{M}_t$ est non dégénérée, donc de rang 2, ce qui contredit la condition b).

On a donc nécessairement $(t|t) = 0$. Pour tout $x \in E$, on a $A_{x.} \in \mathcal{M}_t$ et $A_{.x} \in \mathcal{M}_t$, ce qui implique que la forme trilinéaire $F(x,y,z) = (A(x,y)|z)$ s'annule dès que l'un des trois vecteurs x, y ou z est multiple de t, et il resulte que L'' est lui aussi contenu dans $\mathcal{M}_t$. D'après le lemme 5.2, L, L' et L'' sont formés d'applications linéaires B telles que $Bt = 0$ et $B(t^\perp) \subset \mathbf{C}t$. En définitive, la forme trilinéaire $F(x,y,z)$ s'annule lorsque l'un des trois vecteurs x, y ou z est multiple de t, ou lorsque deux d'entre eux appartiennent à $t^\perp$. Ainsi, A appartient à $Z(t,t,t)$.

THEOREME 7.5 — *La variété algébrique définie par les 327 équations ci-dessus est réunion de deux composantes irréductibles distinctes, à savoir $\mathcal{W}$ et l'adhérence de Z, toutes deux de dimension 7. Chacune de ces deux composantes contient les 7 autres orbites de la liste du lemme précédent.*

Comme l'orbite Z est de dimension trop grande, elle ne peut être contenue dans $\mathcal{W}$. Par ailleurs, l'orbite de dimension 5 est adhérente aux orbites de dimension 6 de la forme iii). Il nous suffit donc de prouver que par limite d'éléments de $\mathcal{W}_{gen}$ (resp. de Z), on peut obtenir des éléments de toutes les orbites de dimension 6 de la liste du lemme précédent.

Dans le cas de Z, cela résulte directement du lemme 7.3 et de la symétrie ternaire évidente. Passons au cas de $\mathcal{W}_{gen}$

Soient d'abord u, v, w et h quatre vecteurs isotropes de E. D'après 2.8, il existe des familles de scalaires (λ_i) et (μ_i) et des familles (R_i) et (S_i) d'éléments de $\mathcal{R}$ tels que

$$\lim(\lambda_i R_i x) = (v|x)u, \ \lim(\mu_i S_i y) = (h|y)w.$$

Mais on a

$$\lim(\lambda_i R_i x \wedge y) = (v|x)u \wedge y,$$

$$\lim(x \wedge \lambda_i S_i y) = (h|y) x \wedge w,$$
$$\lim(\lambda_i \mu_i R_i x \wedge S_i y) = (v|x)(h|y) u \wedge w,$$
$$\lim(\lambda_i R_i x \wedge R_i y) = \lim(\lambda_i R_i (x \wedge y) = (v|x \wedge y) u,$$
$$\lim(\lambda_i \mu_i R_i x \wedge R_i S_i y) = \lim(\lambda_i R_i (x \wedge \mu_i S_i y) = (v|x \wedge w)(h|y) u = (x|w \wedge v)(h|y) u,$$
$$\lim(\lambda_i \mu_i S_i R_i x \wedge S_i y) = \lim(\mu_i S_i (\lambda_i R_i x \wedge y) = (h|u \wedge y)(v|x) w = (v|x)(y|h \wedge u) w.$$

On obtient ainsi des points de toutes les orbites de dimension 6, qui sont donc bien adhérentes à $\mathcal{W}_{gen}$.

Imprimé en France
par
l'Institut National de Recherche en Informatique et en Automatique